

2013 年度 京都大学理学部 電磁気学 4 演習 略解集

手塚真樹*

2014 年 2 月 24 日

目次

1	第 1 回問題	3
1.1	[0] この問題を第 1 回小レポート課題 (締め切りは 2013/10/18) とします。	3
1.2	その場問題 [1] (微分形の Maxwell の法則と積分形の法則の関係)	5
1.3	その場問題 [2] (フーリエ変換)	7
2	第 2 回問題	9
2.1	宿題 [3] (ポテンシャルとゲージ: クーロンゲージとローレンツゲージ)	9
2.2	宿題 [4] (ラプラス変換とラプラス方程式)	10
2.3	その場問題 [5] (単振動する量の複素表示と複素ポインティングベクトル)	13
3	第 3 回問題	14
3.1	宿題 [6] (伝導性媒質)	14
3.2	宿題 [7] (グリーン関数の計算と利用)	16
3.3	その場問題 [8] (コンデンサー)	19
4	第 4 回問題	21
4.1	宿題 [9] (ローレンツ振動子モデル)	21
4.2	宿題 [10] (誘電率の振動数依存性; 記憶が消える時間)	23
4.3	その場問題 [11] (金属中の伝導電子; 表皮の厚さ)	25
5	第 5 回問題	27
5.1	宿題 [12] (ドルーデ模型におけるクラマース-クローニツヒの関係)	27
5.2	宿題 [13] (電磁波の分散; 群速度)	29
5.3	問題 [14] (回路と電流の間に働く力)	31
6	第 6 回問題	32
6.1	宿題 [15] (液体の静的誘電率)	32
6.2	宿題 [16] (直線偏りと円偏り; ファラデー効果)	33
6.3	その場問題 [17] (偏光のジョーンズベクトル)	35

*tezuka@scphys.kyoto-u.ac.jp

7 第 7 回問題	38
7.1 宿題 [18] (導体への電磁波の垂直入射; 絶縁体界面での薄膜による反射波の除去)	38
7.2 宿題 [19] (電磁波の反射と屈折; Snell の法則と Fresnel の公式)	40
7.3 その場問題 [20] (全反射)	42
8 第 8 回問題	44
8.1 宿題 [21] 非等方な誘電体	44
8.2 宿題 [22] (円形導波管)	46
9 第 9 回問題	48
9.1 問題 [23] (円筒形空洞共振器)	48
9.2 宿題 [24] (Trouton-Noble のパラドックス)	49
10 第 10 回問題	51
10.1 宿題 [25] (レンズによる光の屈折)	51
10.2 宿題 [26] (同軸ケーブル)	52
10.3 問題 [27]: 小レポート 3 (提出期限 2013 年 12 月 20 日 (金) 16:30)	53
11 第 11 回問題	56
11.1 宿題 [28] (キルヒホッフの積分公式)	56
11.2 宿題 [29] (完全導体にあいた穴による回折)	57
12 第 12 回問題	59
13 第 13 回問題	59
14 補充問題	59
14.1 宿題 [36]	59
15 最終レポート	62
15.1 最終レポート問題 [37]	62
15.2 最終レポート問題 [38]	66

1 第 1 回問題

1.1 [0] この問題を第 1 回小レポート課題 (締め切りは 2013/10/18) とします。

(A) Biot-Savart の法則によれば、位置 \mathbf{r}' にある微小な長さの電流要素 $d\mathbf{j} \equiv j d\mathbf{l}$ が位置 \mathbf{r} に作る (微小な) 磁束密度は、 $\mathbf{d} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ として

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{d}}}{d^2} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $d \equiv |\mathbf{d}|$, $\hat{\mathbf{d}} \equiv \mathbf{d}/d$ とした。

これを用いて、体積 V に (時刻によらない) 電流 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ が流れているときの磁束密度の空間分布を求めよ。ここで、 μ_0 は真空の透磁率であり、 $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$ を満たす。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

ここで

$$\nabla_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

より、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}.$$

$\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ が \mathbf{r} によらないことと、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times (\nabla \phi)$ より、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}.$$

(B) (A) の結果が、真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

のうち関係のあるものを満たしていることを確かめよ。

$\int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ の rot の divergence は 0 なので、(4) を得る。また、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ より、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla_r \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} - \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_r^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \right]. \quad (6)$$

[] 内第 1 項の積分は、部分積分すると、 V が有限の体積であることと $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ を用いて、0 となる。第 2 項に $\nabla_r |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $c^2 \mu_0 = 1/\epsilon_0$ を用いて、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \therefore c^2 \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

を得る。系は時間変化しないので $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ であり、(5) が得られた。

(C) (右手系の) 球座標 (r, θ, ϕ) を考える。1 階微分可能なベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r(\theta, \phi) + A_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) + A_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi(\theta, \phi)$$

と球座標表示される。 θ は頂角 (inclination; polar angle), ϕ は偏角 (azimuth; azimuthal angle) で、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\theta, \phi) &\equiv \mathbf{x} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{y} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{z} \cos \theta, \\ \mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) &\equiv \mathbf{x} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{y} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{z} \sin \theta, \\ \mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) &\equiv -\mathbf{x} \sin \phi + \mathbf{y} \cos \phi \end{aligned}$$

である。この A_r, A_θ, A_ϕ を用いて、 $\nabla \times \mathbf{A}$ を表せ。また、スカラー場 $f(\mathbf{r})$ に対して、球座標により $\nabla^2 f$ を表せ。

計算の過程は適当な物理数学またはベクトル解析の教科書を参照してください。簡単な変形で同じ形になるものも、もちろん可。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(A_\phi r)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi. \quad (7)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (8)$$

1.2 その場問題 [1] (微分形の Maxwell の法則と積分形の法則の関係)

真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

について、以下 (A), (B) の空欄を埋める式をそれぞれ与え、その物理的意味について考察せよ。ただし、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は電場と磁束密度、 ρ と \mathbf{j} は電荷密度と電流密度、 c と ϵ_0 は光速と真空の誘電率、 t は時刻をそれぞれ表す。また、(C) に答えよ。

(A) (充分滑らかな) 閉曲面 A に囲まれた体積 V を考える。以下、 A 上での (面) 積分について、 A の接平面に垂直で外向きの単位ベクトルを \mathbf{n} で表す。Gauss の定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_A \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5)$$

を用いると、(1), (3) より下記 2 式を得る。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \boxed{(a)} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (6)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (7)$$

つまり、 A を通過する電気力線の (外向きを正、内向きを負とした正味の) 本数は V にある電荷の総量を ϵ_0 で割ったものに等しく、 A を通過する磁力線の正味の本数は 0 である。

(B) 平面上で、(充分滑らかな) 閉曲線 C に囲まれた部分 S を考える。平面の法線方向の単位ベクトル \mathbf{n} をとり、これが手前向きになる側から見て反時計回りに C に沿った線積分を行うものとする。Stokes の定理

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

を用いると、(2), (4) より下記 2 式を得る。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \boxed{(b)} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9)$$

$$c^2 \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS = c^2 \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \cdot \mathbf{n} dS + \boxed{(c)}; \boxed{(c)} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10)$$

つまり、 C に沿って生じる起電力は S を貫く磁束の時間微分と絶対値が等しく、符号は逆である。 C に沿って生じる磁束は、 S を貫く電流を $c^2 \epsilon_0$ で割ったものと、 S を貫く電場の積分の時間微分を c^2 で割ったものとの和で与えられる。

(C) (右手系の) 球座標 (r, θ, ϕ) を考える。1 階微分可能なベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r(\theta, \phi) + A_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) + A_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \quad (11)$$

と球座標表示される。 θ は頂角 (inclination; polar angle), ϕ は偏角 (azimuth; azimuthal angle) で、

$$\mathbf{e}_r(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{y} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{z} \cos \theta, \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{y} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{z} \sin \theta, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \equiv -\mathbf{x} \sin \phi + \mathbf{y} \cos \phi \quad (14)$$

である。この A_r, A_θ, A_ϕ を用いて、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を表示せよ。(ヒント: $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (15)$$

1.3 その場問題 [2] (フーリエ変換)

(A) 次の積分公式を示せ。 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$, $\int_0^{\infty} (\sin \omega t)/t dt = \pi/2$ ($\omega > 0$) を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) \cos(2az) = \sqrt{\pi} \exp(-a^2), \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2 z}{z^2} = \pi. \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) \exp(2iaz) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-(z-2ia)^2 - a^2) = \sqrt{\pi} \exp(-a^2).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2 z}{z^2} = \left[-\frac{\sin^2 z}{z} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sin 2z}{z} \right) dz = 0 + \pi.$$

(ヒント: (1) の左辺は $\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) \exp(2iaz)$ の実部と等しい。(2) の左辺は部分積分により与えられた公式の形にできる)

(B) 関数 $f(x)$ で振幅変調された一次元平面波束 $u(x) = f(x) \exp(ik_0x)$ を考える。フーリエ (Joseph Fourier (1768–1830)) 変換を

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \exp(-ikx) \quad (3)$$

とする。以下に与える関数形 $f(x)$ の場合に、波束の波数スペクトル $|A(k)|^2$ を計算し、図示せよ。

(a) $f(x) = N \exp(-\alpha|x|/2)$ ($\alpha > 0$)

(b) $f(x) = N \exp(-\alpha^2 x^2/4)$ ($\alpha > 0$)

(c) $f(x) = \begin{cases} N & (|x| \leq r) \\ 0 & (|x| > r) \end{cases}$ ($r > 0$)

ここで得られた結果は、パーセバル (Marc-Antoine Parseval (1755–1836)) の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 \quad (4)$$

を満たすことがわかる。(時間があれば上で示した積分公式などを用いて確かめてみよう)

(a) $f(x) = N \exp(-\alpha|x|/2)$ ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} A(k) &= N \int_{-\infty}^0 dx \exp(ik_0x - ikx + \alpha x/2) + N \int_0^{\infty} dx \exp(ik_0x - ikx - \alpha x/2) \\ &= N \left[\frac{1}{ik_0 - ik + \alpha/2} - \frac{1}{ik_0 - ik - \alpha/2} \right] \\ &= \frac{N\alpha}{(k - k_0)^2 + (\alpha/2)^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$|A(k)|^2 = \frac{N^2 \alpha^2}{((k - k_0)^2 + (\alpha/2)^2)^2}. \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx N^2 e^{-\alpha|x|} = \frac{2N^2}{\alpha}; \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 = \frac{N^2 \alpha^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{(k'^2 + (\alpha/2)^2)} = \frac{2N^2}{\alpha}. \quad (8)$$

(b) $f(x) = N \exp(-\alpha^2 x^2/4)$ ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} A(k) &= N \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}x^2 + i(k_0 - k)x\right) \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}\left(x + \frac{2i}{\alpha^2}(k - k_0)\right)^2 - \frac{(k - k_0)^2}{\alpha^2}\right) \\ &= \frac{2N\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{\alpha^2}\right); \end{aligned} \tag{9}$$

$$|A(k)|^2 = \frac{4N^2\pi}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{2(k - k_0)^2}{\alpha^2}\right). \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \frac{N^2\sqrt{2\pi}}{\alpha}. \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 = \frac{2N^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) = \frac{N^2\sqrt{2\pi}}{\alpha}. \tag{12}$$

ただし、最後の積分では $z = (\sqrt{2}/\alpha)(k - k_0)$ とおいた。

(c) $f(x) = \begin{cases} N & (|x| \leq r) \\ 0 & (|x| > r) \end{cases}$ ($r > 0$)

$$A(k) = N \int_{-r}^r dx \exp(ik_0x - ikx) = \begin{cases} 2Nr & (k = k_0) \\ \frac{2N \sin((k-k_0)r)}{k-k_0} & (k \neq k_0) \end{cases} \tag{13}$$

$$|A(k)|^2 = \begin{cases} (2Nr)^2 & (k = k_0) \\ \frac{(2N)^2 \sin^2((k-k_0)r)}{(k-k_0)^2} & (k \neq k_0) \end{cases} \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \int_{-r}^r dx N^2 = 2N^2r. \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{r} 4N^2 \frac{\sin^2 z}{(z/r)^2} = \frac{4N^2r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2 z}{z^2} = 2N^2r. \tag{16}$$

ただし、最後の積分では $z = (k - k_0)r$ とおいた。

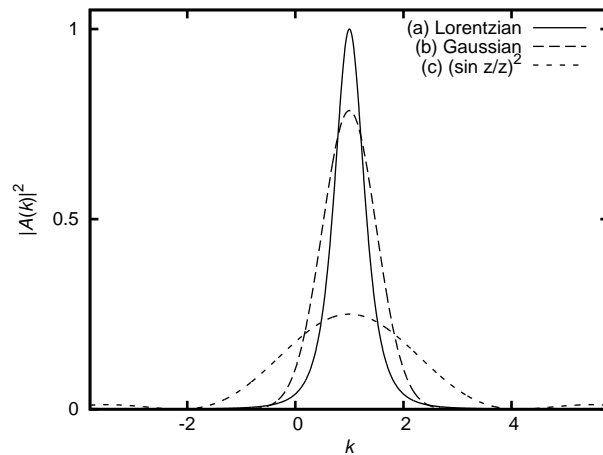


図 1: (B) の $|A(k)|$ を、 $k_0 = 1$ として、問題文の図のパラメータに対してプロットした。

2 第 2 回 問題

2.1 宿題 [3] (ポテンシャルとゲージ: クーロンゲージとローレンツゲージ)

真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

を考える。以下で、ベクトル場およびスカラー場は十分な回数だけ微分可能なものとする。

(A) あるベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ とスカラー場 $\phi(\mathbf{r}, t)$ があって

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (5)$$

$$-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad (6)$$

を満たすとしよう。このとき、(2) と (3) が満たされることを確認し、(1) および (4) から、 \mathbf{E}, \mathbf{B} を含まない独立な 2 個の方程式が得られることを示せ。

略(講義資料参照)。

(B) 任意のスカラー場 χ により、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ としても (5) で得られる \mathbf{B} は変わらない(ゲージ不定性)。このとき、 $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$ とすれば(ゲージ変換)、 \mathbf{E} も不変であることを確かめよ。

ゲージ変換により、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ とすることができる。このように選んだゲージをクーロンゲージという。この場合、(A) で得た方程式の片方が

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

と書けることを確かめ、もう一方の式を求めよ。

(6) を (1) に代入し、微分の順序を交換すると (7) を得る。(5) と (6) を (4) に代入し、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ などを用いて整理すると、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{j}.$$

を得る。

(C) ゲージを選んで

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

となるようにする(ローレンツゲージ)こともできること、また、このとき、 ϕ, \mathbf{A} が満たす微分方程式が

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

のような形になることを説明せよ。また、ローレンツゲージにはどのような不定性が残っているか説明せよ。

略(講義資料参照)。

2.2 宿題 [4] (ラプラス変換とラプラス方程式)

(A) $f(t)$ を $0 \leq t < \infty$ で定義された関数とする。

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-st) \quad (1)$$

(s は複素数, $\text{Re } s > 0$) が存在するとき、関数 $\tilde{f}(s)$ を $f(t)$ のラプラス (Pierre-Simon Laplace (1749–1827)) 変換という。

$0 < \gamma < \omega$ として、常微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

の解を、ラプラス変換を用いて求めることを考える。

(a) $\tilde{x}(s)$ を、 $\tilde{f}(s)$ を用いて表せ。

与えられた方程式の解となる $x(t)$ について、 $\tilde{x}(s)$ が存在するなら、 $x \rightarrow \infty$ で $x(t) \exp(-st) \rightarrow 0$ となる。

$$\int_0^{\infty} dt \frac{dx(t)}{dt} \exp(-st) = [x(t) \exp(-st)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} dt x(t) \exp(-st) = s \tilde{f}(s).$$

同様に

$$\int_0^{\infty} dt \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \exp(-st) = s^2 \tilde{f}(s).$$

となるので、

$$(s^2 + 2\gamma s + \omega^2) \tilde{x}(s) = \tilde{f}(s) \quad \therefore \tilde{x}(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s^2 + 2\gamma s + \omega^2}.$$

(b) 畳み込み積分

$$I(t) = \int_0^t d\tau g(t-\tau)h(\tau) \quad (4)$$

のラプラス変換は

$$\tilde{I}(s) = \tilde{g}(s)\tilde{h}(s) \quad (5)$$

で与えられることを示せ。 $t' = t - \tau$ とする。 $0 \leq \tau \leq t$ での積分の順序を入れ替えて、

$$\begin{aligned} \tilde{I}(s) &= \int_0^{\infty} dt I(t) \exp(-st) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} dt g(t') \exp(-st') h(\tau) \exp(-s\tau) \\ &= \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} dt' g(t') \exp(-st') h(\tau) \exp(-s\tau) \\ &= \int_0^{\infty} dt' g(t') \exp(-st') \int_0^{\infty} d\tau h(\tau) \exp(-s\tau) = \tilde{g}(s)\tilde{h}(s). \end{aligned}$$

を得る。

(c) (b) を用いて、解 $x(t)$ の表式を求めよ。ラプラス変換が $(s^2 + 2\gamma s + \omega^2)^{-1}$ となる関数を求めたい。 $b < s$ とするとき、 $b' \equiv b - s < 0$ であり、

$$\int_0^{\infty} dt \exp(bt) \sin(at) e^{-st} = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} dt (e^{(b'+ai)t} - e^{(b'-ai)t}) = \frac{a}{b^2 + a^2}$$

がわかる。 $0 < \gamma < \omega$ に注意して、

$$\frac{1}{s^2 + 2\gamma s + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \frac{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}{(-\gamma - s)^2 + (\omega^2 - \gamma^2)}$$

と変形すると、

$$h(\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \exp(-\gamma\tau) \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\tau)$$

に対して、

$$I(t) = \int_0^\infty d\tau f(t - \tau)h(\tau)$$

のラプラス変換が $\tilde{x}(s)$ で与えられることがわかる。したがって、

$$x(t) = \int_0^t d\tau \frac{\exp(-\gamma\tau)}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\tau) f(t - \tau).$$

(B) 円柱座標系でのラプラス方程式 $\nabla^2 V(r, \varphi, z) = 0$ を、 $V(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ のように変数分離して解き、 $Z(+\infty) = 0$ かつ $R(0)$ が有限となるような解の一般形を求めよ。

円柱座標系でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と書けるので、これを $\nabla^2 V = 0$ に施した式において、 $V(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ として両辺 V で割り、移項して

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} / Z.$$

左辺は r, φ の、右辺は z の関数なので、両辺は定数であり、これを $-M$ とおく。 $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = MZ$ の解は

$$\begin{cases} Z \propto e^{\pm \sqrt{M}z} & (M > 0) \\ Z = az + b(a, b : \text{const.}) & (M = 0) \\ Z \propto e^{\pm i\sqrt{-M}z} & (M < 0) \end{cases}$$

だが、 $M \leq 0$ に対する解は $Z(+\infty) = 0$ を満たさないのが不適であり、 $M > 0$ となる。 $m > 0$ を用いて $M = m^2$ と書ける。

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + m^2 r^2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} / \Phi = L$$

と書けて、上と同様にして

$$\begin{cases} \Phi \propto e^{\pm i\sqrt{L}\varphi} & (L > 0) \\ \Phi = a'\varphi + b'(a', b' : \text{const.}) & (L = 0) \\ \Phi \propto e^{\pm \sqrt{-L}\varphi} & (L < 0) \end{cases}$$

を得る。 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ を満たしうるのは、 $L = l^2$ (l : 整数) のときである。ただし、 $l = 0$ のときは Φ は定数となる。 $l \geq 0$ としてよい。このとき、

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + (m^2 r^2 - l^2)R = 0$$

$\rho \equiv mr, \tilde{R}(\rho) = R(r)$ として、両辺 ρ で割って整理すると、Bessel の微分方程式

$$\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{l^2}{\rho^2}\right) \tilde{R} = 0$$

を得る。 $R(0)$ が有限な解は第 1 種 Bessel 関数

$$J_l(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k! \Gamma(l+k+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{l+2k}$$

およびその定数倍。以上より、

$$V(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) = J_l(mr)(Ae^{il\phi} + Be^{-il\phi})e^{-mz} \quad (l \geq 0 \text{ は整数}, m > 0, A, B \text{ は定数})$$

を得る。ただし $l=0$ のときは A, B の片方を 0 としてよい。

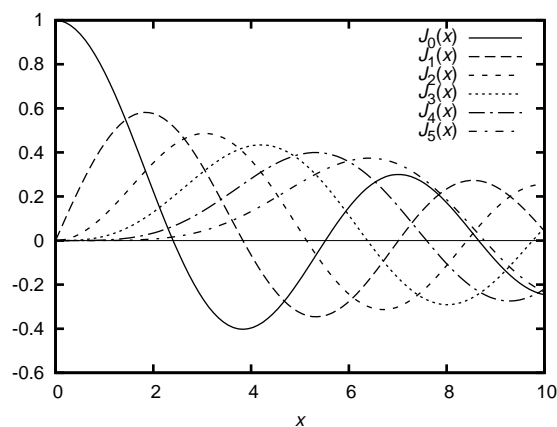


図 2: 第 1 種 Bessel 関数のプロット。

2.3 その場問題 [5] (単振動する量の複素表示と複素ポインティングベクトル)

一般に、振動数 ω で時間変動する場は、電場については

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad (1)$$

のように表され、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は一般に複素ベクトルである。磁場 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} 、電束密度 \mathbf{D} 、電流密度 \mathbf{J} なども同様の形式に書ける。

(A) 通常のポインティング (John Henry Poynting (1852–1914)) ベクトルを

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

複素ポインティングベクトルを

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})/2 \quad (3)$$

とそれぞれ定義するとき、 $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ の時間平均は

$$\overline{\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)} = \text{Re}[\mathbf{s}(\mathbf{r})] \quad (4)$$

で与えられることを示せ。

以下、 (\mathbf{r}) を省略する。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} [\mathbf{E}e^{-i\omega t}] \times \text{Re} [\mathbf{H}e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*e^{i\omega t}) \times (\mathbf{H}e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{-2i\omega t} + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*e^{2i\omega t}) \end{aligned}$$

で、 t に依存する項は時間平均をとると消えるので、

$$\overline{\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}(\mathbf{r}) + \mathbf{s}^*(\mathbf{r})) = \text{Re}[\mathbf{s}(\mathbf{r})].$$

(B) 電場と磁場のエネルギー密度をそれぞれ

$$w_e(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r})/4, \quad (5)$$

$$w_m(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r})/4, \quad (6)$$

と定義するとき、Maxwell 方程式に基づいて、体積 V の領域に対する複素ポインティングの定理

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2i\omega \int_V \mathbf{dr} [w_e(\mathbf{r}) - w_m(\mathbf{r})] + \int_S \mathbf{dS} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

を導け。ここで、左辺最終項は領域 V の全表面 (S) にわたる表面積分を意味する。

まず、Maxwell 方程式より $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}$ を得る。これらおよび、ベクトル解析の公式から得られる $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^*) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}^*$ を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} (\nabla \times \mathbf{H}^* - i\omega \mathbf{D}^*) \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} [-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}^* - i\omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*] \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} [\nabla \cdot (2\mathbf{s}) + i\omega (\mathbf{B} \times \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \times \mathbf{D}^*)] \\ &= \int_V \mathbf{dr} \nabla \cdot \mathbf{s} - 2i\omega \int_V \mathbf{dr} [w_e - w_m]. \end{aligned}$$

Gauss の定理より、与えられた式を得る。

3 第 3 回 問題

3.1 宿題 [6] (伝導性媒質)

電気伝導率 σ 、誘電率 ϵ 、透磁率 μ の一様な非分散性の伝導性媒質を考える。正味の電荷はないとする。

(A) Maxwell 方程式から出発し、媒質中の点 \mathbf{r} 、時刻 t における電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ が、方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

を満たすことを示せ。

$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ の rot をとる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}).$$

正味の電荷がないので $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ である。 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ を用いて、与えられた式を得る。

(B) 電場が振動数 ω で時間変化するとき、変位電流の絶対値が伝導電流の絶対値に比べて小さくなるのは、 ω がどのような範囲のときか。この条件は、 $\sigma = 5.0 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ 、 $\epsilon / \epsilon_0 = 80$ の海水の場合にどうなるか。

変位電流 $\mathbf{j}_d = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ と伝導電流 $\sigma \mathbf{E}$ の大きさを比較する。 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$ のように時間変化するとすれば、 $\mathbf{j}_d = -i\epsilon \omega \mathbf{E}$ より、振幅の比 r は $r = \epsilon \omega / \sigma$ となるので、 $\omega < \sigma / \epsilon$ のときに変位電流の絶対値の方が小さくなる。

$\epsilon_0 = c^{-2} \mu_0^{-1}$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ である。 $[\text{H}] = [\Omega \cdot \text{s}]$ を用いて計算し、 $\sigma / \epsilon = 2\pi \times (1.1 \times 10^9 \text{rad/s})$ を得る。1 GHz の電磁波は 0.3 m の波長を持ち、UHF (極超短波) に分類される。

(C) 場の時間変動が準静的で変位電流が無視できる場合、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

を満たす。時刻 $t (> 0)$ におけるこの方程式の解を、初期状態 ($t = 0$) での値をもとにして、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', 0) \quad (3)$$

のように表す。グリーン (George Green (1793–1841)) 関数 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ が、以下のフーリエ表示で与えられることを示せ。

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp\left(-\frac{k^2}{\mu\sigma} t\right) \quad (4)$$

以下、 $\alpha \equiv 1/(\mu\sigma)$ 、 $\mathbf{x} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ とする。(3) を (2) に代入して、

$$\int d\mathbf{r}' [\alpha \nabla^2 G - \partial G / \partial t] \mathbf{E}(\mathbf{r}', 0) = 0.$$

これが任意の $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ に対して成り立つので、

$$\alpha \nabla^2 G(\mathbf{x}, t) - \partial G(\mathbf{x}, t) / \partial t = 0.$$

表 1: 電波の周波数または波長による分類

略称など	周波数	ITU band	波長	日本語名
TLF	< 3 Hz		> 100 000 km	極超長波
ELF	3 Hz – 30 Hz		100 000 km – 10 000 km	
SLF	30 Hz – 300 Hz		10 000 km – 1 000 km	
ULF	300 Hz – 3 kHz		1 000 km – 100 m	
VLF	3 kHz – 30 kHz	4	100 km – 10 km	超長波
LF	30 kHz – 300 kHz	5	10 km – 1 km	長波
MF	300 kHz – 3 MHz	6	1 km – 100 m	中波
HF	3 MHz – 30 MHz	7	100 m – 10 m	短波
VHF	30 MHz – 300 MHz	8	10 m – 1 m	超短波
UHF	300 MHz – 3 GHz	9	1 m – 100 mm	極超短波
SHF	3 GHz – 30 GHz	10	100 mm – 10 mm	センチメートル波
EHF	30 GHz – 300 GHz	11	10 mm – 1 mm	ミリメートル波
THF	300 GHz – 3 THz	12	1 mm – 100 μm	テラヘルツ波
IR	300 GHz – 430 THz		1 mm – 700 nm	赤外線
visible light	410 THz – 790 THz		740 nm – 380 nm	可視光線
UV	750 THz – 30 PHz		400 nm – 10 nm	紫外線

$$G(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{k}, t)$$

とすると、

$$(2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} [-\alpha k^2 \tilde{G} - \partial \tilde{G} / \partial t] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0$$

より、

$$\partial \tilde{G} / \partial t = -\alpha k^2 \tilde{G} \quad \therefore \tilde{G}(\mathbf{k}, t) = \tilde{G}_0(\mathbf{k}) \exp(-\alpha k^2 t).$$

$t = 0$ においては $G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})$ なので、 $\tilde{G}_0(\mathbf{k}) = 1$ ととればよい。このとき、

$$G(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-\alpha k^2 t)$$

となり、(4) が示された。

3.2 宿題 [7] (グリーン関数の計算と利用)

(A) [6] (C) の積分を実行して、以下の式を導け。

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \frac{1}{8} \left(\frac{\mu\sigma}{\pi t} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\mu\sigma}{4t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2\right] \quad (1)$$

\mathbf{k} と \mathbf{x} のなす角を θ と書くと、 $k' \equiv k - ix/(2\alpha t)$ を用いて、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \exp(-\alpha k^2 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \\ &= (2\pi)^{-3} \int dk k^2 \exp(-\alpha t k^2) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \exp(ikx \cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{(2\pi)^{-2}}{ix} \left[\int_0^\infty dk k \exp(-\alpha t k^2 + ixk) - \int_0^\infty dk k \exp(-\alpha t k^2 - ixk) \right] \\ &= \frac{(2\pi)^{-2}}{ix} \int_{-\infty}^\infty dk k \exp(-\alpha t k^2 + ixk) \\ &= (2\pi)^{-2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) \int_{-\infty}^\infty dk' \left(\frac{k'}{ix} + \frac{1}{2\alpha t}\right) \exp(-\alpha t k'^2) \\ &= (2\pi)^{-2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) \frac{1}{2\alpha t} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} = \frac{1}{8} \left(\frac{\mu\sigma}{\pi t} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\mu\sigma}{4t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2\right]. \end{aligned}$$

(B) $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ が以下の微分方程式を満足することを示せ。

$$\frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) \quad (2)$$

与えられた微分方程式の解を

$$G'(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega \mathcal{G}'(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$$

と書くことを考える。

$$\delta(\mathbf{x}) \delta(t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$$

より、

$$(2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega [(-i\omega + \alpha k^2) \mathcal{G}' - 1] = 0$$

が任意の \mathbf{x}, t について成り立つので、 $\mathcal{G}'(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \alpha k^2)^{-1}$. よって、 ω に関する積分路を下
半平面を囲むようにとって、

$$G'(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{1}{-i\omega + \alpha k^2} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-\alpha k^2 t)$$

を得る。これは前問の (4) である。

(C) 透磁率 μ 、電気伝導率 σ の一様な非分散性の伝導性媒質で満たされた空間内の位置 $z = a$, $-a$ に、無限に広い平板が x - y 面に平行に置かれている。これらの平板に互いに逆向きの定常電流を流すことによって、平板間の領域 $-a < z < a$ に、 x 方向の一様な磁場 $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{x}}$ ができており ($\hat{\mathbf{x}}$ は単位ベクトル)、その外側 ($|z| > a$) では $\mathbf{H} = 0$ である。いま、時刻 $t = 0$ に電流を切ったとすると、その後の時刻 t 、場所 \mathbf{r} における磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は [6] と同様の拡散方程式

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

で記述され、その解は

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{H}(\mathbf{r}', 0) \quad (4)$$

と表される。この式の右辺に [6](C) で与えたグリーン関数を代入することにより、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ を計算せよ。必要ならば、誤差関数

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi dx e^{-x^2} \quad (5)$$

を用いよ。特に、電流を切った直後および、充分時間が経過した後での振舞を議論せよ。

初期条件は

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \begin{cases} H_0 \hat{\mathbf{x}} & (|z| < a) \\ \mathbf{0} & (|z| > a) \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int_{|z| < a} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{H}(\mathbf{r}', 0) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\mu\sigma}{\pi t} \right)^{3/2} H_0 \hat{\mathbf{x}} \int_{|z| < a} d\mathbf{r}' \exp \left[-\frac{\mu\sigma}{4t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \right]. \end{aligned}$$

積分を I とおくと、これは x', y', z' に関する積分の積 I_x, I_y, I_z を用いて $I = I_x I_y I_z$ と表される。

$$I_x = I_y = \sqrt{\frac{4\pi t}{\mu\sigma}}.$$

また、 $Z \equiv z' - z$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-a-z}^{a-z} dZ \exp \left[-\frac{\mu\sigma Z^2}{4t} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi t}{\mu\sigma}} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}} (a-z) \right) - \Phi \left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}} (-a-z) \right) \right); \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{H_0}{2} \hat{\mathbf{x}} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}} (a-z) \right) - \Phi \left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}} (-a-z) \right) \right). \end{aligned}$$

ここで、

$$\Phi(\xi) \begin{cases} \rightarrow \pm 1 & (\xi \rightarrow \pm\infty), \\ \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi & (|\xi| \ll 1) \end{cases}$$

である。したがって、

(i) 電流を切った直後

$|z| \gg a$ のときは \mathbf{H} は $\exp -z^2$ に比例して小さくなる。

$|z-a| \ll \sqrt{\frac{4t}{\mu\sigma}}$ の範囲では、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{H_0}{2} \hat{\mathbf{x}} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\pi t}} (z-a) \right).$$

$-a < z < a$ かつ $|z \pm a| \gg \sqrt{\frac{4t}{\mu\sigma}}$ の範囲では、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{H_0}{2} \hat{\mathbf{x}} (1 - (-1)) = H_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

$|z+a| \ll \sqrt{\frac{4t}{\mu\sigma}}$ の範囲では、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{H_0}{2} \hat{\mathbf{x}} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\pi t}} (z+a) \right).$$

(ii) 充分時間が経過した後 ($|z|, a \ll \sqrt{\frac{4t}{\mu\sigma}}$ とする)

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}}(a-z)\right) - \Phi\left(\sqrt{\frac{\mu\sigma}{4t}}(-a-z)\right) \simeq \frac{2\sqrt{\mu\sigma}a}{\sqrt{\pi t}}$$

より、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\sqrt{\mu\sigma}a}{\sqrt{\pi t}} H_0 \hat{\mathbf{x}}.$$

$t_0 \equiv \mu\sigma/(4a^2)$ とすると、図のようになる。

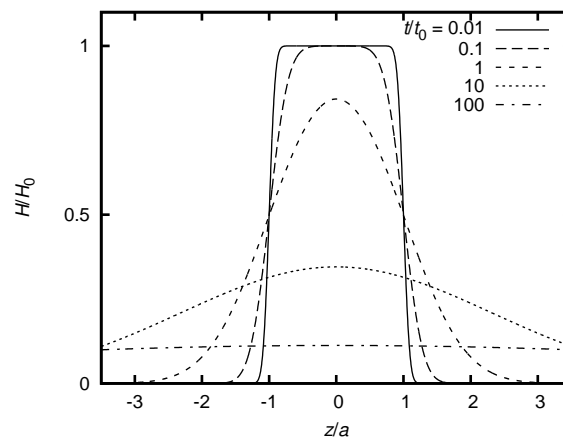


図 3: $H \equiv |\mathbf{H}|$ を異なる t/t_0 の値に対してプロットした。

3.3 その場問題 [8] (コンデンサー)

半径 a の薄い円盤状極板 2 枚が、真空中に中心軸 (z 軸) を共通にして間隔 $d (\ll a)$ で平行に配置されたコンデンサーを考える。これらは $z = d/2, -d/2$ の平面上にあるとしてよい。振動数 ω の交流電圧をかけると、2 枚の極板はそれぞれ電荷 $Q(t), -Q(t)$ をもち、 $Q(t)$ は時刻 t とともに $Q(t) = \text{Re} [Q_0 \exp(-i\omega t)]$ のように変動する。

このとき、極板間には交流電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ 、およびそれに伴う交流磁場 (磁束密度を $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ と表す) が発生する。 $d \ll a$ であることと、 z 軸まわりの回転対称性から、 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z = \tilde{E}_z(r)\mathbf{e}_z$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{B}}(r)$ としてよい。

(a) 極板間では電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} のどちらも存在しないことに注意して、Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

を円筒座標系 (r, ϕ, z) で解き、 $\tilde{E}_z(r)$ が満たすべき微分方程式を求めよ。

ただし、円筒座標系で、任意のベクトル $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_z\mathbf{e}_z$ について

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \quad (6)$$

となることを使ってよい。

(2) より $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega \tilde{\mathbf{B}}$ であり、(6) を用いて、

$$0 = i\omega \tilde{B}_r(r), \quad -\frac{d\tilde{E}_z(r)}{dr} = i\omega \tilde{B}_\phi(r), \quad 0 = i\omega \tilde{B}_z(r)$$

を得る。よって $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{B}_\phi(r)\mathbf{e}_\phi$ と書ける。(4) より $c^2 \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = -i\omega \tilde{\mathbf{E}}$ であり、

$$c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tilde{B}_\phi(r)) = -i\omega \tilde{E}_z(r)$$

を得る。上で得た式を用いて $\tilde{B}_\phi(r)$ を消去し、下記を得る。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \tilde{E}_z(r) \right) + \omega^2 \tilde{E}_z(r) = 0 \quad \therefore \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_z(r) = 0.$$

(b) (a) で得た式を、必要な境界条件のもとに解き、極板間の電場 $\text{Re} [\tilde{E}_z(r)e^{-i\omega t}]\mathbf{e}_z$ と磁束密度 $\text{Re} [\tilde{\mathbf{B}}(r)e^{-i\omega t}]$ を、第 1 種ベッセル (Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)) 関数を用いて表せ。

ただし、 ν 次の第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ は、微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) f(x) = 0 \quad (7)$$

の $x = 0$ で有界な解 (の規格化定数を適当に選んだもの) で、

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (8)$$

と表される。 ν 次ベッセル関数の満たす公式 $(x^\nu J_\nu(\alpha x))' = \alpha x^\nu J_{\nu-1}(\alpha x)$, $J_{-\nu}(x) = (-)^\nu J_\nu(x)$ を使ってよい。

$x = (\omega/c)r$ とすれば (7) で $\nu = 0$ とおいた式になり $\tilde{E}_z(r) = A J_0((\omega/c)r)$ と書ける。円盤上の電荷は $Q(t)$ なので、(1) と Gauss の定理より、 $z = d/2$ の円盤を囲む閉曲面 S 、外向きに \mathbf{s} をとり

$$\int_S \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

ここで、電場は極板間にしかないので、左辺は

$$-\int_0^a dr 2\pi r E_z(r) = 2\pi A \int_0^a dr J_0((\omega/c)r) = -2\pi A \frac{c}{\omega} [r J_1((\omega/c)r)]_0^a = -\frac{2\pi A c a}{\omega} J_1(\omega a/c).$$

したがって

$$A = -\frac{\omega Q_0}{2\pi \epsilon_0 c a J_1(\omega a/c)}; \quad \mathbf{E} = \text{Re} [\tilde{E}_z(r) e^{-i\omega t}] \mathbf{e}_z = -\frac{\omega Q_0}{2\pi \epsilon_0 c a J_1(\omega a/c)} J_0(\omega r/c) \cos(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

また、

$$\tilde{B}_\phi(r) = \frac{i}{\omega} \frac{d\tilde{E}_z(r)}{dr}$$

なので、 $J_0(\alpha x)' = \alpha J_{-1}(\alpha x) = -\alpha J_1(\alpha x)$ を用いて、

$$\tilde{B}_\phi(r) = \frac{i\omega Q_0}{2\pi \epsilon_0 c^2 a J_1(\omega a/c)} J_1(\omega r/c). \quad \mathbf{B} = \frac{i\omega Q_0}{2\pi \epsilon_0 c^2 a J_1(\omega a/c)} J_1(\omega r/c) \sin(\omega t) \mathbf{e}_\phi.$$

(c) $\omega \rightarrow 0$ の極限を考える。(b) の結果はどう近似されるか。 $(\omega a/c)$ について最低次までとる) またこのとき、2 枚の極板の外周の間において、Poynting ベクトル

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9)$$

の大きさと向きはどうなるか。 $\rho_0 \equiv Q_0/(\pi a^2)$ を用いてよい。

$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots$, $J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \dots$ である。最初の項のみを残して計算すると、

$$\tilde{E}_z(r) \simeq -\rho_0/\epsilon_0; \quad \mathbf{E} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos(\omega t) \mathbf{e}_z.$$

$$\tilde{B}_\phi(r) \simeq (i\omega \rho_0/(2\epsilon_0 c^2))r; \quad \mathbf{B} = (\omega \rho_0 r/(2\epsilon_0 c^2)) \sin(\omega t) \mathbf{e}_\phi.$$

$$\mathbf{S}(r = a) = (\omega \rho_0^2 a/(2\epsilon_0)) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \mathbf{e}_r = (\omega \rho_0^2 a/(4\epsilon_0)) \sin(2\omega t) \mathbf{e}_r.$$

これは、 $|Q(t)|$ が減少するときには半径方向外向き、増加するときには半径方向内向きである。極板上で一様な電荷密度 $\rho(t) = \text{Re} [\rho_0 e^{-i\omega t}]$ に対応する極板間の電磁場のエネルギー

$$\pi a^2 d \cdot \frac{1}{2} (\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \epsilon_0 c^2 |\mathbf{B}|^2) = (\pi a^2 d \rho_0^2 / (2\epsilon_0)) [\cos^2 \omega t + O((\omega a/c)^2)]$$

の増減が、コンデンサ側面 (面積 $2\pi a d$) に垂直な Poynting ベクトルで記述されることを表す。

(d) ω を充分大きくとれば、極板の中心と端とで電場の向きを逆にできることを説明せよ。

0 次 Bessel 関数 $J_0(x)$ は実軸上に無限個の零点 $x_i \simeq 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915, \dots$ を持つ。

$$\frac{\tilde{E}_z(r = a)}{\tilde{E}_z(r = 0)} = J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)$$

より、 $\omega a/c$ が J_0 の奇数番目の零点と次の偶数番目の零点の間にあるような ω については、極板の中心と端で電場の向きが逆となる。

4 第 4 回 問題

4.1 宿題 [9] (ローレンツ振動子モデル)

原子の古典的模型として、電子 (質量 m , 電荷 $-e$) が原子核にばね (固有振動数 ω_0) で束縛されているものを考える。原子に電場 $\mathbf{E}(t)$ が加わったとき、電子の平衡点からの変位 $\mathbf{r}(t)$ は運動方程式

$$m \left[\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r}(t) \right] = -e \mathbf{E}(t) \quad (1)$$

に従う。ただし、 γ は振動の減衰を表す正の定数で、 $\gamma \ll \omega_0$ を仮定する。

(a) 振動数 ω の電場 $\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t}$ に対するこの原子の分極率 $\tilde{\alpha}(\omega)$ を求めよ。ただし、双極子モーメントを $\mathbf{p}(t) = -e\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(\omega) e^{-i\omega t}$ とするとき、 $\tilde{\alpha}(\omega)$ は $\tilde{\mathbf{p}}(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ を満たす。

$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t}$ として、与えられた式に代入して

$$m \left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2 \right] \tilde{\mathbf{r}}(\omega) e^{-i\omega t} = -e \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad \therefore \tilde{\mathbf{p}}(\omega) = -e \tilde{\mathbf{r}}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{\tilde{\mathbf{E}}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

となるので、

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

以下、このような原子を単位体積あたり n 個含む希薄な絶縁性の気体を考える。

(b) (a) の結果から、この気体の複素誘電関数 $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + n\tilde{\alpha}(\omega)$ を求め、実部 $\text{Re } \tilde{\epsilon}(\omega)$ と虚部 $\text{Im } \tilde{\epsilon}(\omega)$ の概略を図示せよ。

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + n\tilde{\alpha}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$\gamma \ll \omega_0$ より、 $\omega \sim \omega_0$ のとき、虚部は

$$\text{Im } \tilde{\epsilon}(\omega) \simeq \frac{ne^2}{m} \frac{\gamma\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

と Lorentzian 型になる。 $ne^2/m = 1$, $\gamma = 0.4$, $\omega_0 = 4$ とした場合の結果を図示した。

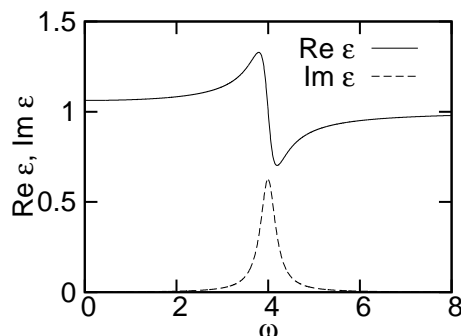


図 4: 複素誘電関数 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ の実部と虚部

(c) この気体の複素電気伝導率 $\tilde{\sigma}(\omega)$ とその実部 $\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega)$ 、虚部 $\text{Im } \tilde{\sigma}(\omega)$ を求めよ。また、関係式

$$\tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = i\tilde{\sigma}(\omega)/\omega \quad (2)$$

が成り立つことを確かめよ。

$\tilde{\sigma}(\omega)$ は、 $\mathbf{J}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega)\mathbf{E}(\omega)$ を満たす。 $\mathbf{J}(t) = -ne\dot{\mathbf{r}}(t)$ より、 $\mathbf{J}(\omega) = i\omega n e\mathbf{r}(\omega)$ であり、

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{i\omega n e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

より

$$\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \text{Im } \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

を得る。したがって、

$$\tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{i}{\omega} \tilde{\sigma}(\omega).$$

(d) この気体中を伝わる平面電磁波の振動数 ω 、波数 k 、および複素誘電関数 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ の間に成り立つ関係式 (分散関係) を書き、電磁波の単位長さあたりの減衰係数が

$$\text{Im } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-\text{Re } \tilde{\epsilon}(\omega) + |\tilde{\epsilon}(\omega)|}{2\epsilon_0}} \quad (3)$$

で与えられることを示せ。

$\mu = \mu_0$ とする。

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

として、気体中で

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \tilde{\epsilon}(\omega) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = 0.$$

$\hat{\mathbf{z}}$ 方向に伝わるとして $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ とおく。 $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ を代入する。 $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \tilde{\epsilon} = 0$ より、分散関係として

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0}} \quad \therefore \text{Im } k = \frac{\omega}{c} \frac{\text{Im } \tilde{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}}$$

を得る。さて、 $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_1 + i\epsilon_2 = \xi^2$ と書き、 $\xi = x + iy$, x, y を正の実数とすると、 $x^2 - y^2 = \epsilon_1$, $2xy = \epsilon_2$ より、 $(\frac{\epsilon_2}{2y})^2 - y^2 = \epsilon_1$ となるので、 y^2 についての 2 次方程式

$$(y^2)^2 + \epsilon_1 y^2 - \left(\frac{\epsilon_2}{2}\right)^2 = 0$$

を解いて非負の解を選び、

$$y^2 = \frac{-\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}{2} = \frac{-\text{Re } \tilde{\epsilon} + |\tilde{\epsilon}|}{2}$$

を得る。よって $\text{Im } k$ は上の式で与えられ、 $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-k_2 z} e^{ik_1 z}$ と書けるので、単位長さあたりの減衰係数を与える。

4.2 宿題 [10] (誘電率の振動数依存性; 記憶が消える時間)

問題 [9] で扱った原子の周りに束縛された電子 (質量 m , 電荷 $-e$) についての古典的模型を再考する。外から電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ が加えられたときの電子の運動方程式は

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r}) = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (1)$$

であった。 ω_0 はばね定数, γ は振動の減衰を表す正の定数である。

(a) この原子の双極子モーメントは $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}(t)$ で与えられる。原子の密度を n とするとき、巨視的な分極ベクトルは $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$ であり、電束密度は $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$ と書ける。このとき、

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (2)$$

となることを示せ。これは誘電率 ϵ が外場の振動数 ω に依存することの解釈を与える。

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ として運動方程式に代入すると振幅 \mathbf{x}_0 が求まる。また、 $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ とおけば、

$$\mathbf{p}_0 = -e\mathbf{x}_0 = \frac{e^2\mathbf{E}_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

である。巨視的な分極ベクトル $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t}$ の振幅は $\mathbf{P}_0 = N\mathbf{p}_0$ となる。電束密度が $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + N\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} = \epsilon\mathbf{E}$ なので、与えられた誘電率 ϵ の表式を得る。

(b) 外場がさまざまな振動数の重ね合わせとして

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3)$$

のように与えられる場合、電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ は時刻 t についてのフーリエ変換を用いて

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4)$$

と表せる。誘電率を $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega))$ とおくことで上記の表式が

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (5)$$

となることを示し、この式の解釈を述べよ。さらに、 $G(\tau)$ を電気比感受率 $\chi(\omega)$ を用いて表せ。(ヒント: 電場のフーリエ変換は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (6)$$

となる)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} \epsilon(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \epsilon_0 \delta(t-t') + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \right] \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \\ &= \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \end{aligned}$$

ここで、 $G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$ である。

この式は、位置 \mathbf{x} における時刻 t の電束密度が、電場の過去と未来 (時刻 t) の情報に従って決定されると解釈される。しかし、通常は (逆問題を考えない限り)、未来の情報に左右されるのは不自然である。そのため、 $G(\tau) = 0$ ($\tau < 0$) となるのが自然であると考えられる。

(c) $\omega_0 > \gamma/2$ としよう。必要ならば $\nu \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ を用いて、以下に答えよ。

(i) 設問 (b) の結果の $\chi(\omega)$ に設問 (a) の結果を用い、具体的に $G(\tau)$ を計算せよ。留数定理を使い、積分経路も示すこと。

(ii) 被積分関数の極の位置を考慮することで、 $G(\tau)$ の τ 依存性には特徴的な性質があることがわかる。これは何と呼ばれているか。

(iii) 過去に加えられた外場の記憶が消える時間スケールは何で与えられるか述べてよ。

(1) の結果を用いると、

$$G(\tau) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

である。被積分関数の極は $\omega_{\pm} = -i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/4)}$ にある。

$\tau < 0$ の場合、積分経路は図の左のように、上半面にある半円の半径を無限大にしたものを考えればよい。円弧の部分からの寄与は半径無限大でゼロになるが、経路内に極はないので $G(\tau) = 0$ ($\tau < 0$) となる ((b) と矛盾しない)。他方、 $\tau > 0$ の場合は図の右のように下半面にある半円の半径を無限大にしたものを取る。この場合は 2 つの極まわりの留数を考えて、積分は

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\omega_p^2}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} e^{-i\omega\tau} d\omega = \frac{\epsilon_0}{2\pi} (-1) 2\pi i (-\omega_p^2) \left[\frac{e^{-i\omega_+\tau}}{\omega_+ - \omega_-} + \frac{e^{-i\omega_-\tau}}{\omega_- - \omega_+} \right] \\ &= \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu} e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \sin(\nu\tau) \quad (\tau > 0) \quad \left(\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right). \end{aligned}$$

となる (1 行目の式の最右辺の (-1) は経路の周る向きが負の向きであることによる)。

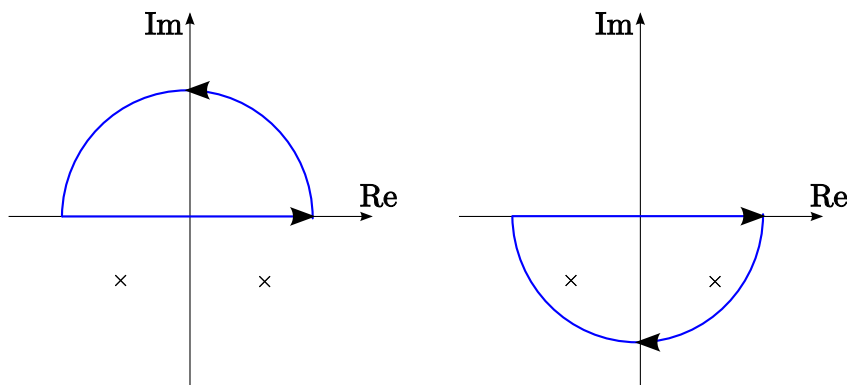


図 5: 問題 [I](3) の積分経路

$$G(\tau) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\nu} e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \sin(\nu\tau) & (\tau \geq 0), \\ 0 & (\tau < 0) \end{cases}$$

となり、 $\tau < 0$ ではゼロになっている。これは因果性 (causality) と呼ばれる。

$G(\tau)$ は $\tau > 0$ で指数関数的に減衰する $G(\tau) \propto e^{-\frac{\gamma}{2}\tau}$ 。この減衰の特徴的な時間スケールは $2/\gamma$ で与えられる。(もっと大雑把に $1/\gamma$ としても可)。

(ここまで 2013/10/25 配布)

4.3 その場問題 [11] (金属中の伝導電子; 表皮の厚さ)

金属中の伝導電子は、原子核に束縛されていないため、比較的自由に運動することができる。そこで、金属に電場 $\mathbf{E}(t)$ がかったときの電子の運動方程式を、

$$m \left[\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right] = -e\mathbf{E}(t)$$

で記述する。これは問題 [9] で $\omega_0 = 0$ とおいた場合に相当し、 γ は電子の受ける衝突頻度を意味する。単位体積あたりの電子数を n とする。

(a) 問題 [9] の結果を用いて、この金属の複素電気伝導率 $\tilde{\sigma}(\omega)$ と複素誘電率 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ を求めよ。

[9] で $\omega_0 = 0$ とおく。 $\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega}$ より

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + n\tilde{\alpha}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m\omega} \frac{-\omega + i\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} = \epsilon_0 - \frac{ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega + i\gamma}$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \frac{i\omega ne^2}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{ne^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

を得る。

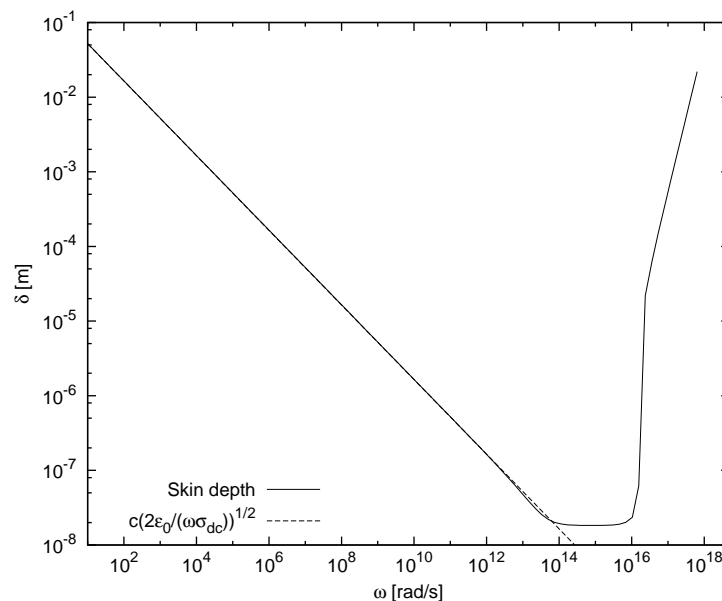


図 6: (d) で与えた銅のパラメータについて、 $\delta \equiv (\text{Im } k)^{-1}$ を ω に対してプロットした。

(b) $\omega \ll \{\gamma, (\sigma_{dc}/\epsilon_0)\}$ (Hagen–Rubens 領域; Carl Ernst Bessel Hagen (1851–1923), Heinrich Rubens (1865–1922)) で、 $\tilde{\sigma}(\omega)$ が直流電気伝導率 $\sigma_{dc} = ne^2/m\gamma$ に帰着することを示せ。また、このとき、[9](d) の結果をもとに、電磁波が金属中に侵入する典型的な距離 (表皮の厚さ) δ を求めよ。

前者は、上で $\omega \ll \gamma$ とすれば明らか。 $\tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = \frac{i\sigma_{dc}}{\omega}$ と書け、 $\sigma_{dc} = ne^2/m\gamma \gg \epsilon_0\omega$ として、

$$\delta^{-1} = \text{Im } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-\text{Re } \tilde{\epsilon}(\omega) + |\tilde{\epsilon}(\omega)|}{2\epsilon_0}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + (\frac{\sigma_{dc}}{\epsilon_0\omega})^2}}{2}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma_{dc}}{2\epsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\omega\sigma_{dc}}{2\epsilon_0}} c$$

を得る。従って $\delta = c \sqrt{(2\epsilon_0)/(\omega\sigma_{dc})}$ である。

(c) プラズマ振動数を $\omega_p \equiv \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m}$ で定義する。 $\omega > \omega_p (\gg \gamma)$ の電磁波に対して金属は透明になることを示せ。(透明領域)

$\omega > \omega_p \gg \gamma$ のとき

$$\tilde{\epsilon}(\omega) \simeq \epsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) + i \frac{ne^2 \gamma}{m\omega^3}$$

であり、上と同様に考えて、 $\omega_p < \omega$ においては $\text{Im } k$ が極めて小さくなることがわかる。

(d) 常温の銅では $\sigma_{dc} = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, $n = 8.5 \times 10^{28} \text{m}^{-3}$ である。 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ とし、Hagen–Rubens 領域と透明領域に相当する ω の範囲を求めよ。

$\gamma = ne^2/(m\sigma_{dc}) = 4.1 \times 10^{13} [\text{rad/s}]$ となり、6 THz 程度より充分周波数が小さい (0.05 mm 程度より充分波長が長い) とき Hagen–Rubens 領域となる。 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ として計算すると、 $\omega_p = 1.6 \times 10^{16} [\text{rad/s}]$ となり、3 PHz 程度より周波数が大きい、すなわち $0.1 \mu\text{m}$ 程度より波長が短い紫外線に対してはほぼ透明となることがわかる。(桁と単位が合っていればよい)

5 第 5 回 問題

5.1 宿題 [12] (ドルーデ模型におけるクラマース-クローニツヒの関係)

ドルーデ模型 (問題 [11] で調べた模型) (Paul Karl Ludwig Drude (1863–1906)) で求めた金属の複素誘電率 $\tilde{\epsilon}(\omega)$ が、クラマース-クローニツヒの関係 (Hendrik Anthony Kramers (1894–1952), Ralph de Laer Kronig (1904–1995))

$$\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega) - \frac{\sigma_{\text{dc}}}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega} \quad (2)$$

および総和則

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} \left[\frac{\tilde{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \omega_p^2 \quad (3)$$

を満たしていることを示せ。

ただし、 $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ はコーシー (Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)) の主値 (principal value) を意味し、 $f(x)$ が実軸上に特異点 x_k ($k = 1, 2, \dots, n; k < k'$ のとき $x_k < x_{k'}$) を持つとき、

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow +0} \cdots \lim_{\epsilon_n \rightarrow +0} \left(\int_{-R}^{x_1 - \epsilon_1} + \int_{x_1 + \epsilon_1}^{x_2 - \epsilon_2} + \cdots + \int_{x_n + \epsilon_n}^R \right) dx f(x)$$

で与えられるものとする。

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m\omega} \frac{-\omega + i\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}; \quad \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{ne^2}{m(\gamma - i\omega)}$$

であったから、

$$\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + \gamma^2)}; \quad \operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega) = \frac{ne^2\gamma}{m\omega(\omega^2 + \gamma^2)}; \quad \sigma_{\text{dc}} = \frac{ne^2}{m\gamma}.$$

さて、簡単な留数計算 ($\omega' = \omega$ を半径 $\epsilon \ll \gamma$ の上半円でよけ、原点を中心とする半径 $R \gg \gamma$ の上半円と結んだ積分路をとり、 $\epsilon \rightarrow +0, R \rightarrow \infty$ の極限をとればよい) により、コーシーの主値積分を

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)(\omega'^2 + \gamma^2)} = -\frac{\pi\omega}{\gamma(\omega^2 + \gamma^2)}.$$

のように求められる。よって、以下のように (2) が示せる。

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega) - \frac{\sigma_{\text{dc}}}{\omega} &= \frac{ne^2}{m\omega} \left(\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right) = -\frac{ne^2}{m\omega} \frac{\omega^2}{\gamma(\omega^2 + \gamma^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{ne^2}{m} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)(\omega'^2 + \gamma^2)} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega} \end{aligned}$$

また、同様の計算 ($\omega' = 0$ は新たな上半円でよける) により、

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)\omega'(\omega'^2 + \gamma^2)} = -\frac{\pi}{\gamma(\omega^2 + \gamma^2)}$$

を得る。よって、以下のように (1) が示せる。

$$\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + \gamma^2)} = \frac{1}{\pi} \frac{ne^2\gamma}{m} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - \omega)\omega'(\omega'^2 + \gamma^2)} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega}$$

さらに、

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma}$$

より、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} \left[\frac{\tilde{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \frac{2ne^2\gamma}{\pi\epsilon_0 m} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} = \omega_p^2.$$

5.2 宿題 [13] (電磁波の分散; 群速度)

波数スペクトル $A(k)$ をもつ一次元平面波束 (光パルス) が、分散関係 $\omega = \omega(k)$ を満たす非伝導性媒質中を x 方向へ進行するとき、時刻 t におけるパルス波形は

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} \quad (1)$$

と書ける。ただし、エネルギー損失はないとする。いま、

$$A(k) = N \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{\alpha^2}\right], \quad (2)$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0) + \frac{\omega''_0}{2}(k - k_0)^2 \quad (3)$$

で与えられる場合に、以下の問に答えよ。

(a) 上式で k に関する積分を実行し、 $u(x, t)$ の表式を求めよ。 $t = 0$ のとき、 $u(x, 0)$ の包絡線は問題 [2](b) と同じガウス (Carl Friedrich Gauss (1777–1855)) 形になることを確かめよ。

一般に、複素数 A, B について、 $\operatorname{Re} A > 0$ のとき、

$$-Ak^2 + iBk = -A\left(k - \frac{iB}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A} \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-Ak^2 + iBk) = \sqrt{\pi/A} \exp\left(-\frac{B^2}{4A}\right)$$

が成り立つ。そこで、 $A \equiv \alpha^{-2} - i\omega''_0 t/2$, $B \equiv x - \omega'_0 t$ として、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk N \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{\alpha^2} + ikx - i\left(\omega_0 + \omega'_0(k - k_0) + \frac{\omega''_0}{2}(k - k_0)^2\right)t\right] \\ &= \frac{N}{\sqrt{\pi}\alpha} \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp\left[\left(-\frac{1}{\alpha^2} - \frac{i\omega''_0 t}{2}\right)k'^2 + i(x - \omega'_0 t)k'\right] \\ &= \frac{N}{\alpha\sqrt{A}} \exp\left(-\frac{(x - \omega'_0 t)^2}{4A} + i(k_0 x - \omega_0 t)\right) \\ &= \frac{N}{\sqrt{1 + i\alpha\omega''_0 t/2}} \exp\left(-\frac{(\alpha(x - \omega'_0 t))^2}{4 - 2i\alpha^2\omega''_0 t} + i(k_0 x - \omega_0 t)\right). \end{aligned}$$

$t = 0$ のときには

$$u(x, 0) = N \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}x^2 + ik_0 x\right).$$

より包絡線は $\pm N \exp(-\alpha^2 x^2/4)$ となる。

(b) $\omega''_0 = 0$ のとき、

$$|u(x, t)| = |u(x - \omega'_0 t, 0)| \quad (4)$$

が成り立つことを示せ。これは、パルスの中心が群速度

$$v_g = \omega'_0 = [d\omega(k)/dk]_{k=k_0} \quad (5)$$

で移動することを意味する。

$\omega_0'' = 0$ を代入して、

$$u(x, t) = N \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}(x - \omega_0't)^2\right) \exp(i(k_0x - \omega_0t))$$

$$\therefore |u(x, t)| = |u(x - \omega_0't, 0)| = N \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4}(x - \omega_0't)^2\right).$$

(c) $\omega_0'' \neq 0$ のとき、パルスの中心位置と幅はどのように時間変化するか。

(a) で求めたように

$$u(x, t) = \frac{N}{\sqrt{1 + i\alpha\omega_0''t/2}} \exp\left(-\frac{(\alpha(x - \omega_0't))^2}{4 - 2i\alpha^2\omega_0''t} + i(k_0x - \omega_0t)\right)$$

なので、パルスの中心(包絡線のピーク)は $x = x_0(t) = \omega_0't$ にあり、 $|x - x_0(t)| = \sqrt{|4 - 2i\alpha^2\omega_0''t|}/\alpha$ のときに $|u(x, t)|$ の値が $|u(x = x_0(t), t)|$ の $1/e$ となることがわかる。幅をこのときの $|x - x_0(t)|$ の値として、以下のように定義すると、

$$\begin{aligned} W(t) &\equiv 2 \sqrt{|4 - 2i\alpha^2\omega_0''t|}/\alpha \\ &= \frac{8}{\alpha} \sqrt{1 + (\alpha^2\omega_0''t/2)^2}. \end{aligned}$$

を得る。短時間では

$$W(t \ll (\alpha^2\omega_0'')^{-1}) \simeq \frac{8}{\alpha} (1 + (\alpha^2\omega_0''t/2)^2/2) = \frac{8}{\alpha} + \alpha^3\omega_0''^2t^2.$$

また、長い時間が経過した後には

$$W(t \gg (\alpha^2\omega_0'')^{-1}) \simeq 4\alpha\omega_0''t.$$

なお、包絡線は Gaussian 型なので、半値半幅 (half width half maximum; HWHM) は $\sqrt{\ln 2} W$, 半値全幅 (full width half maximum; FWHM) は $2\sqrt{\ln 2} W$ となることがわかる。 $\sqrt{\ln 2} = 0.83255\dots$ である。

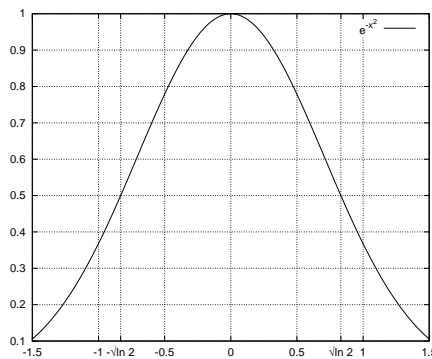


図 7: $\exp(-x^2)$ を x に対してプロットした。

(ここまで 2013/11/1 配布)

5.3 問題 [14] (回路と電流の間に働く力)

真空中で、長方形をなす閉回路 C に電流 I_1 が流れ、その近くに長い直線の電線があつて電流 $I_2 (> 0)$ が z 方向に流れている。閉回路の中心と電線は距離 d 離れており、電線と平行な辺の長さを a 、もう一方の辺の長さを b とする。また、電線と閉回路の中心を含む z - x 平面と閉回路は角度 α をなすものとする。電流 I_1 の符号は電線と最も近い部分で I_2 と平行のとき正にとる。

(A) 電流 I_2 の作るベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ を求め、相互作用磁気エネルギーが以下のようになることを示せ。

$$W_{12}(d, \alpha) = \int \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{4\pi} \ln \left[\frac{4d^2 + b^2 + 4db \cos \alpha}{4d^2 + b^2 - 4db \cos \alpha} \right]. \quad (1)$$

(B) 電流の大きさをそれぞれ一定に保つとき、閉回路と電線の間に働く力を計算せよ。

(C) 閉回路の磁気モーメントを \mathbf{m}_1 、電流が閉回路の中心に作る磁束密度を \mathbf{B}_2 とする。 $d \gg a, b$ のとき、 W_{12} は $\mathbf{m}_1, \mathbf{B}_2$ を用いてどのように近似されるか。

問題文 35–36 ページ参照のこと。

6 第 6 回 問題

6.1 宿題 [15] (液体の静的誘電率)

分極率 α の原子を単位体積あたり n 個含む液体の静的誘電率 ϵ を求めよう。

半径 R の円形極板 2 枚を間隔 $H (\ll R)$ で配置した平行平板コンデンサーの極板間にこの液体を封入し、2 枚の極板にそれぞれ面電荷密度 $-\sigma, \sigma$ を与えたとする。極板間が真空のときに極板間に生ずる電場は $\mathbf{E}_{\text{ext}} = (\sigma/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$ ($\hat{\mathbf{z}}$ はコンデンサーの軸方向の単位ベクトル) であるが、液体中で実際に観測される電場 \mathbf{E}_{liq} は $\mathbf{E}_{\text{liq}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$ となる。ここで誘起電場 \mathbf{E}_{ind} は、個々の原子に誘起された双極子モーメント \mathbf{p} が作り出す電場の重ね合わせである。

(a) 極板間のちょうど中間に存在する原子に着目し、この原子の感じる誘起電場が、

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{2}{3} \frac{np}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (1)$$

であることを示せ。ただし、原子間の位置の相関は無視する。

(ヒント：個々の原子は直径 r をもち互いに距離 r 以内には接近しないと仮定しよう。誘起される電荷は、極板と接する液体表面および、着目した原子を中心とする半径 r の球表面上に現れる。これらの電荷が作る誘起電場を求め、最後に $r \rightarrow 0$ の極限をとる。)

極板と接する液体表面に誘起される電荷の面密度は $\sigma_{\text{ind}} = -np$ より、これが作る誘起電場は $-\frac{np}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ 。一方、ある原子のまわり半径 r の球内に他の原子がいないとすると、球表面 S 上の電荷密度は z 方向からの角度を θ として $n \cos \theta$ と表される。球表面の電荷密度が球の中心に作る電場は対称性より z 方向で、大きさは

$$\int_S \frac{np \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta ds = \int_0^\pi \frac{2\pi r^2 np \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta d\theta = \frac{np}{2\epsilon_0} \int_1^{-1} -t^2 dt = \frac{np}{3\epsilon_0}.$$

よって、 $\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{np}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{np}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = -\frac{2}{3}\frac{np}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}$ 。

(b) (a) で液体中に生ずる分極 \mathbf{P} と外部電場 \mathbf{E}_{ext} の関係を $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_0\mathbf{E}_{\text{ext}}$ と書くとき、

$$\chi_0 = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 + \frac{2}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \quad (2)$$

を示せ。また、一般に、液体中での \mathbf{P} と \mathbf{E} の関係を $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}$ と書くとき、 χ と χ_0 は $\chi = \chi_0/(1 - \chi_0)$ の関係にある。このことを用いて、液体の静的誘電率 ϵ が

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{1}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \quad (3)$$

と書けることを示せ(クラウジウス-モソッティの関係式 (Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888), Ottaviano-Fabrizio Mossotti (1791–1863)))。

$\mathbf{P} = np\hat{\mathbf{z}} = \epsilon_0\chi_0\mathbf{E}_{\text{ext}} = n\alpha\mathbf{E}_{\text{liq}} = n\alpha(\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}})$ であるから、

$$np = \epsilon_0\chi_0 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{n\alpha}{\epsilon_0} \left(\sigma - \frac{2np}{3\epsilon_0} \right).$$

p について解くと、

$$p = \left(1 + \frac{2n\alpha}{3\epsilon_0}\right)^{-1} \frac{\alpha}{\sigma} \epsilon_0. \quad \therefore \chi_0 = \frac{np}{\sigma} = \chi_0 = \frac{n\alpha}{\epsilon_0} \left/ \left(1 + \frac{2n\alpha}{3\epsilon_0}\right)\right.$$

また、 $A \equiv n\alpha/\epsilon_0$ とおくと、 $\chi_0 = A/(1 + 2A/3)$ より、

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - \chi_0} = \frac{A}{1 - A/3}. \quad \therefore \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \frac{1 + \frac{2A}{3}}{1 - \frac{A}{3}}.$$

6.2 宿題 [16] (直線偏りと円偏り; ファラデー効果)

無限媒質中を z 方向へ伝播する平面電磁波を考える。 x 方向, y 方向の単位ベクトルをそれぞれ ϵ_x, ϵ_y と書き、互いに直交する複素単位ベクトル $\epsilon_{\pm} = (\epsilon_x \pm i\epsilon_y) / \sqrt{2}$ を導入するとき、電場ベクトルは、一般に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_+ \epsilon_+ + E_- \epsilon_-) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (1)$$

の形で与えられる。ここで E_+, E_- は一般に複素数であり、現実の電場ベクトルは $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ の実部である。

(A) いま、 $E_-/E_+ = r \exp(i\alpha)$ (r, α は実数) の形に書けるとしよう。

(a) $\alpha = 0$ のとき、空間内の与えられた一点で電場ベクトルの終点が描く軌跡は x - y 平面内の楕円であることを示せ。得られた結果は、 $r = 0$ のとき、左旋円偏波 (右円偏光) 左円偏光 (右旋円偏波) に帰着することを確かめよ。ただし、電場ベクトルが円を描くとき、

- 電磁波の 進む方向 に見て左 (右) 回りの場合に 左 (右) 旋円偏波
- 電磁波を 受ける側から 見て左 (右) 回りの場合に 左 (右) 円偏光

という。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_+ (\epsilon_+ + r e^{i\alpha} \epsilon_-) \exp(i(kz - \omega t))$$

である。 $E_+ = \sqrt{2} E_0 \exp(i\omega t_0)$ となる t_0 をとることができ、このとき

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 [(1 + r e^{i\alpha}) \epsilon_x + i(1 - r e^{i\alpha}) \epsilon_y] \exp(i(kz - \omega(t - t_0)))$$

$\alpha = 0$ のとき、

$$E(\mathbf{r}, t)_x = \text{Re} [E_0 (1 + r) \exp(i(kz - \omega(t - t_0)))] = E_0 (1 + r) \cos(kz - \omega(t - t_0))$$

$$E(\mathbf{r}, t)_y = \text{Re} [i E_0 (1 - r) \exp(i(kz - \omega(t - t_0)))] = -E_0 (1 - r) \sin(kz - \omega(t - t_0))$$

なので、楕円を描く。 $r = 0$ とする。 $t_0 = 0$ としてよい。

$$E(\mathbf{r}, t)_x = E_0 \cos(kz - \omega t) = E_0 \cos(\omega t - kz); \quad E(\mathbf{r}, t)_y = -E_0 \sin(kz - \omega t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

となって円を描き、これは $+z$ 方向から見て左回りなので、左円偏光 (右旋円偏波) である。

(b) $\alpha \neq 0$ のとき、電場ベクトルの終点が描く図形は、(a) で求めた楕円の軸を角度 $\alpha/2$ だけ回転させて得られる楕円であることを示せ。得られた結果は、 $r = \pm 1$ のとき、直線偏波に帰着することを確かめよ。

(ヒント: $\epsilon_x(\phi) \equiv \epsilon_x \cos \phi + \epsilon_y \sin \phi$, $\epsilon_y(\phi) \equiv -\epsilon_x \sin \phi + \epsilon_y \cos \phi$, $\epsilon_{\pm}(\phi) \equiv (\epsilon_x(\phi) \pm i\epsilon_y(\phi)) / \sqrt{2}$ を用いてみよ)

$$e^{\mp i\phi} \epsilon_{\pm} = e^{\mp i\phi} (\epsilon_x \pm i\epsilon_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\epsilon_x \cos \phi + \epsilon_y \sin \phi) \pm i(-\epsilon_x \sin \phi + \epsilon_y \cos \phi)] = \epsilon_{\pm}(\phi)$$

より、

$$\epsilon_+ + r e^{i\alpha} \epsilon_- = e^{i\alpha/2} (e^{-i\alpha/2} \epsilon_+ + r e^{i\alpha/2} \epsilon_-) = e^{i\alpha/2} (\epsilon_+(\alpha/2) + r \epsilon_-(\alpha/2))$$

となり、(a) で求めた楕円を x - y 平面で $\alpha/2$ 回転させたものとなる。 $\alpha = 0$ で調べればよく、

$$r = +1 \text{ のとき } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \epsilon_x \exp(i(kz - \omega(t - t_0)))$$

$$r = -1 \text{ のとき } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2iE_0 \epsilon_y \exp(i(kz - \omega(t - t_0)))$$

を得る。

(B) [10] で考えた絶縁性の気体に、 z 方向の一様な定常磁場 (磁束密度 $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$) がかかっている。
(a) この気体の左旋円偏波 (右円偏光) および右旋円偏波 (左円偏光) に対する複素誘電関数をそれぞれ求めよ。

z 方向へ進行する波を考えて $\mathbf{P}(z, \omega) = \alpha(\omega)\mathbf{E}(z, \omega)$ を求め、これから $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + n\alpha(\omega)$ を求める。

$$m\ddot{\mathbf{r}}(z, t) = -e\mathbf{E}(z, t) - m\gamma\dot{\mathbf{r}}(z, t) - m\omega_0^2\mathbf{r}(z, t) - e\dot{\mathbf{r}}(z, t) \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$$

より、 x 成分に注目すると $m\ddot{x}(z, t) = -e\mathbf{E}(t)_x(z, t) - m\gamma\dot{x}(z, t) - m\omega_0^2x(z, t) - eB_0\dot{y}(z, t)$ 。右旋円偏波 (左円偏光) $\mathbf{E}(z, t) = E_0(\epsilon_x + i\epsilon_y)e^{i(kz - \omega t)}$ のとき、偏位 $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ について、 $x(z, t) = \text{Re } x(z, \omega)e^{-i\omega t}$, $y(z, t) = \text{Re } y(z, \omega)e^{-i\omega t}$, $y(z, \omega) = ix(z, \omega)$ として代入して

$$-\omega^2 x(z, \omega) = -eE_0 + (im\gamma\omega - m\omega_0^2 - eB_0\omega)x \quad \therefore x = \frac{e}{\omega^2 - \omega_0^2 + (-eB_0/m + i\gamma)\omega} E_0$$

を得る。 $\mathbf{P} = -e\mathbf{r}$ より、

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - (-eB_0/m + i\gamma)\omega}; \quad \tilde{\epsilon}_+(\omega) = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - (-eB_0/m + i\gamma)\omega}.$$

左旋円偏波 (右円偏光) のときは $\mathbf{E}(z, t) = E_0(\epsilon_x - i\epsilon_y)e^{i(kz - \omega t)}$ と書けるので、 $y(z, \omega) = -ix(z, \omega)$ として代入して、

$$\tilde{\epsilon}_-(\omega) = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - (eB_0/m + i\gamma)\omega}.$$

(b) z 方向に進行する直線偏光の平面電磁波 (振動数 ω) がこの気体に入射したとする。電磁波が気体中を距離 l だけ進むとき、電磁波の偏光面はどれだけ回転するか (ファラデー (Michael Faraday (1791–1867)) 効果)。簡単のため $\gamma = 0$ とし、 $|\omega^2 - \omega_0^2| \gg \{(eB_0/m)\omega, ne^2/(\epsilon_0 m)\}$ を仮定する。

$$\tilde{\epsilon}_\pm = \epsilon_0 + \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm (eB_0\omega/m)}$$

となる。[10] より、 $k_\pm = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_\pm}{\epsilon_0}}$ である。 $E_+(z) = E_0 e^{ik_+ z}$, $E_-(z) = E_0 e^{ik_- z}$ と書くと、 $r(z) = E_-(z)/E_+(z)$ の位相は距離 l 進む間に $\alpha(l) \equiv (k_- - k_+)l$ だけ回転し、偏光面は $\Delta\theta(l) \equiv \alpha(l)/2$ だけ回転する。

$$\Delta\theta(l) = \frac{\omega l}{2c} \left[\sqrt{1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - (eB_0\omega/m)}} - \sqrt{1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + (eB_0\omega/m)}} \right]$$

となる。 $|\omega^2 - \omega_0^2| \gg (eB_0\omega/m)$, $|\omega^2 - \omega_0^2| \gg ne^2/(\epsilon_0 m)$ より、

$$\begin{aligned} \Delta\theta(l) &\simeq \frac{\omega l}{2c} \left[\left(1 + \frac{ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(1 + \frac{eB_0\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right) - \left(1 + \frac{ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(1 - \frac{eB_0\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right) \right] \\ &= \frac{ne^3 B_0 \omega^2}{2c\epsilon_0 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} l. \end{aligned}$$

具体的に、例えば $B_0 = 1 \text{ T}$, $n = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ とすると、 $eB_0/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$, $\sqrt{ne^2/(\epsilon_0 m)} = 2.93 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ を得る。700 THz (波長 428 nm) の紫の光を考えると $\omega = 4.40 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ で、 $\omega_0 \ll \omega$ を仮定すると、

$$\Delta\theta(l)/l \simeq \frac{ne^3 B_0}{2c\epsilon_0 m^2 \omega^2} = 1.30 \text{ m}^{-1}$$

を得る。

(ここまで 2013/11/ 8 配布)

6.3 その場問題 [17] (偏光のジョーンズベクトル)

z 方向に進む、偏光した光を考える。電場ベクトルが、実数 E_{0x}, E_{0y} と位相 ϕ_x, ϕ_y , および x, y 成分に共通の波数 k と角振動数 ω ($\omega = ck$) を用いて、

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \mathbf{e}_x + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \phi_y)} \mathbf{e}_y \right] \quad (1)$$

と表されるとしよう。偏光の状態を表すためにジョーンズ (Robert Clark Jones (1916–2004)) ベクトルを導入する。 $E_0 \equiv \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$ と定義すると、

$$\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[E_0 \begin{pmatrix} \frac{E_{0x}}{E_0} \\ \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i(\phi_y - \phi_x)} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \right] \quad (2)$$

(問題文で、最後の部分が $e^{i(kz - \omega t + i\phi_x)}$ となっていたのを訂正)

となって、式の最右辺に現れる、(無次元の)規格化されたベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{E_{0x}}{E_0} \\ \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i(\phi_y - \phi_x)} \end{pmatrix}$$

が、光の偏光状態を表すことがわかる。これを(規格化された)ジョーンズベクトルと呼ぶ。

(A) 以下の光の規格化されたジョーンズベクトルを求めよ。

$$R(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

とする。

(a) 電場が x 軸と角度 θ をなす直線偏光

$\theta = 0$ のときに x 軸方向であり、 $\mathbf{J}_{\text{lin}}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので、 y 方向へ θ 回転して

$$\mathbf{J}_{\text{lin}}(\theta) = R(\theta) \mathbf{J}_{\text{lin}}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

(b) 右円偏光(左旋円偏波)

右円偏光(左旋円偏波)について $\epsilon_- = (\epsilon_x - i\epsilon_y)/\sqrt{2}$ であったから、 $\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} / \sqrt{2}$.

(c) 長軸が x 軸と角度 θ をなし、長軸と短軸の長さの比が $1 : \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) の左回り楕円偏光 ($\alpha = 0$ とすると (a) の結果に帰着することを確かめよ)

まず $\theta = 0$ の場合を考え、 y 方向へ θ 回転する。

$$\mathbf{J}_L(\theta = 0, \alpha) = (1 + \alpha^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}_L(\theta, \alpha) = R(\theta) \mathbf{J}_L(\theta = 0, \alpha) = (1 + \alpha^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta - i\alpha \sin \theta \\ \sin \theta + i\alpha \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 0$ なら (a) の結果を再現する。

(B) 入射した光のうち、特定の方向に平行な電場の成分を透過させる物体を偏光子という。また、2つの直交する電場成分が透過するとき、その間に位相差を与える板を波長板という。

これらの光学素子を通じた光の偏光状態は、入射光のジョーンズベクトルに、ジョーンズ行列と呼ばれる2次元正方行列を掛けることによって表現される。(第1成分が実数の規格化されたジョーンズベクトルを入力しても、通過後のジョーンズベクトルがそのような形になるとは限らない)

以下の光学素子に対応するジョーンズ行列を求めよ。

(a) 電場が x 方向の光の成分を通す偏光子

x 方向の電場をそのまま通し、 y 方向の電場は遮断するので、

$$M_{\text{pol}}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) 電場が x 軸と角度 θ をなす光の成分を通す偏光子

(まず、ジョーンズ行列 M を持つ光学素子を、元の角度から θ 回転させたときのジョーンズ行列を $M(\theta)$ として、 $M(\theta)$ を、 θ を含む行列と M とで表してみよう)

ジョーンズベクトルは電場に比例する量なので、空間座標の変換に対して(極性)ベクトルとしてふるまう。(磁場に比例する量を考えれば擬ベクトル(軸性ベクトル)となる。) x 軸と角度 θ をなす x' 軸, それに垂直な y' 軸を考えると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

だから、 $M(\theta) = R(\theta)M(-\theta)$ となるのがわかる。したがって、

$$M_{\text{pol}}(\theta) = R(\theta)M_{\text{pol}}(\theta = 0)R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{pmatrix} / 2.$$

(c) 電場の x 成分に比べて y 成分の位相を $\pi/2$ 遅らせる波長板 (四分の一波長板; $\lambda/4$ 板)

$\phi_y > \phi_x$ のとき、 x 成分の位相が y 成分より進んでいる。 $\phi_y - \phi_x$ を $\pi/2$ だけ増加させる。

$$M_{\lambda/4}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; M_{\lambda/4}(\theta) \equiv R(\theta)M_{\lambda/4}(0)R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1 - i) \cos \theta \sin \theta \\ (1 - i) \cos \theta \sin \theta & i \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

$\lambda/4$ 板は直線偏光を円偏光または楕円偏光に変換する。

(d) 電場の x 軸と角度 θ をなす成分に比べて、それと直交する成分の位相を π 遅らせる波長板 (半波長板; $\lambda/2$ 板)

まず $\theta = 0$ の場合を考えると、位相を π 遅らせることは符号を反転させることに相当し、

$$M_{\lambda/2}(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ となる。これを } \theta \text{ 回転させて}$$

$$M_{\lambda/2}(\theta) = R(\theta)M_{\lambda/2}(\theta = 0)R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

$\lambda/2$ 板は直線偏光を回転させる。

(C) 上記の結果を用いて、直線偏光を光学素子に通して (A) の (b), (c) の光をそれぞれ得る方法を考え、説明せよ。

ある θ 、例えば $\theta = \pi/4$ あるいは $\theta = 0$ の場合に実現できれば充分である。

(b): $\mathbf{J}_{\text{lin}}(\pi/4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ より、 $M_{\pi/4}(\theta = 0)\mathbf{J}_{\text{lin}}(\pi/4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_R$.

(c): x 方向の偏光が与えられたとする。 $\lambda/2$ 板で直線偏光を回転させ、

$$\mathbf{J}_{\text{lin}}(\chi) = M_{\lambda/2}(\theta = \chi/2)\mathbf{J}_0(0) = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix}; \cos \chi = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \sin \chi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

とする。次いで、 $\lambda/4$ 板で直線偏光を楕円偏光にする。

$$M_{\lambda/4}\mathbf{J}_{\text{lin}}(\chi) = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ i \sin \chi \end{pmatrix} = \mathbf{J}_L(\theta = 0, \alpha).$$

7 第 7 回問題

7.1 宿題 [18] (導体への電磁波の垂直入射; 絶縁体界面での薄膜による反射波の除去)

(A) 振動数 ω の直線偏りの平面電磁波が、真空の自由空間から電気伝導率 σ 、誘電率 ϵ の非透磁性媒質 ($\mu = \mu_0$) へ垂直に入射する。

(a) 反射率 R および、入射波に対する反射波の位相のずれ ϕ をそれぞれ求めよ。

x - y 平面を媒質の境界とし、電磁波が z 方向に進むとする。直線偏光なので、電場が x 成分のみを持つとしてよく、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ より、真空中で

$$E_x = E_I e^{i(k_0 z - \omega t)} + E_R e^{i(-k_0 z - \omega t)}, \quad B_y = \frac{E_I}{c} e^{i(k_0 z - \omega t)} - \frac{E_R}{c} e^{i(-k_0 z - \omega t)}$$

媒質中で

$$E_x = E_T e^{i(kz - \omega t)}, \quad B_y = \frac{E_T}{c} e^{i(kz - \omega t)}$$

と書ける。ここで、媒質中では $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \ddot{\mathbf{E}} + \mu \sigma \dot{\mathbf{E}}$ となるので、 $-k^2 = -\mu \epsilon \omega^2 - i \mu \sigma \omega$ より $k = \sqrt{\mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega}$ を得る。 E_x, B_z が境界で連続なので、

$$E_I + E_R = E_T, \quad E_I/c - E_R/c = (k/\omega) E_T$$

となることから、屈折率の逆数 $\eta \equiv \omega/ck$ として、 $E_R = -((1 - \eta)/(1 + \eta)) E_I$ となり、反射率は

$$R = |(1 - \eta)/(1 + \eta)|^2,$$

位相のずれは

$$\phi = \arg[-((1 - \eta)/(1 + \eta))]$$

と与えられる。

(b) 良導体 ($\sigma \gg \omega \epsilon$) では近似的に $R \approx 1 - 2\omega\delta/c$, $\phi \approx \pi$ となることを示せ。ここで δ は問題 [11] で導入した表皮の厚さである。

$$k^2 = i\mu\sigma\omega(1 - i\epsilon\omega/\sigma) \simeq i\mu\sigma\omega; \quad \eta \simeq e^{-i\pi/4} \omega \sqrt{\epsilon_0/(\omega\sigma)} = (1 - i)\omega \sqrt{\epsilon_0/(2\omega\sigma)}$$

であり、このとき $|\eta| \ll 1$ がわかる。よって、位相のずれは $\arg -1 = \pi$ に近く、 $\delta = c \sqrt{2\epsilon_0/(\omega\sigma)}$ とするとき、

$$R \simeq |1 - \eta|^4 = \left| 1 - \omega \sqrt{\epsilon_0/(2\omega\sigma)} + i\omega \sqrt{\epsilon_0/(2\omega\sigma)} \right|^4 \simeq 1 - 4\omega \sqrt{\epsilon_0/(2\omega\sigma)} = 1 - 2\omega\delta/c.$$

(B) 3 つの非透磁性誘電体からなる層状の系を考える。3 つの誘電体はそれぞれ屈折率 n_1, n_2, n_3 をもち、3 次元空間内の $z < 0$ 、 $0 \leq z \leq d$ 、 $d < z$ の部分を占めている。媒質 n_1 の中を z 方向へ伝播する振動数 ω の直線偏りの平面電磁波が、媒質 n_2 を垂直に通りぬけて媒質 n_3 に進入する。(a) $k_i = (\omega/c)n_i$ ($i = 1, 2, 3$) とし、電場は \mathbf{e}_x に平行として、以下 x 成分のみを表示する。媒質 n_1 中を $\pm z$ 方向に進む電磁波の電場を $E_{1\pm} \exp[i(\pm k_1 z - \omega t)]$ 、媒質 n_2 中を $\pm z$ 方向に進む電磁波の電場を $E_{2\pm} \exp[i(\pm k_2 z - \omega t)]$ 、媒質 n_3 中を $+z$ 方向に進む電磁波の電場を $E_3 \exp[i(k_3 z - \omega t)]$ としよう。透過率 $T \equiv (k_3/k_1)|E_3/E_{1+}|^2$ と反射率 $R \equiv |E_{1-}/E_{1+}|^2$ を求めよ。

界面に平行な方向の電場、磁場成分が境界面の前後で保存することより、 $\tilde{E}_{2\pm} \equiv E_{2\pm} e^{\pm i k_2 d}$ 、 $\tilde{E}_3 \equiv E_3 e^{i k_3 d}$ として、 $z = 0$ において

$$\begin{cases} E_{1+} + E_{1-} = E_{2+} + E_{2-} \\ n_1(E_{1+} - E_{1-}) = n_2(E_{2+} - E_{2-}) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} E_{1+} = \frac{1}{2n_1} ((n_1 + n_2)E_{2+} + (n_1 - n_2)E_{2-}); \\ E_{1-} = \frac{1}{2n_1} ((n_1 - n_2)E_{2+} + (n_1 + n_2)E_{2-}). \end{cases}$$

同様に、 $z = d$ においては上記で $E_{1\pm} \rightarrow \tilde{E}_{2\pm}$ 、 $E_{2+} \rightarrow \tilde{E}_3$ 、 $E_{2-} \rightarrow 0$ 、 $n_{1,2} \rightarrow n_{2,3}$ と読み替えて、

$$\begin{cases} \tilde{E}_{2+} + \tilde{E}_{2-} = \tilde{E}_3 \\ n_2(\tilde{E}_{2+} - \tilde{E}_{2-}) = n_3 \tilde{E}_3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} E_{2+} = e^{-i k_2 d} \frac{n_2 + n_3}{2n_2} \tilde{E}_3; \\ E_{2-} = e^{i k_2 d} \frac{n_2 - n_3}{2n_2} \tilde{E}_3. \end{cases}$$

これを上の結果に代入して、

$$\begin{aligned} E_{1+} &= \frac{\tilde{E}_3}{4n_1 n_2} \left(e^{-i k_2 d} (n_1 + n_2)(n_2 + n_3) + e^{i k_2 d} (n_1 - n_2)(n_2 - n_3) \right) \\ &= \frac{\tilde{E}_3}{2n_1 n_2} \left((n_1 n_2 + n_2 n_3) \cos k_2 d - i(n_2^2 + n_1 n_3) \sin k_2 d \right); \\ E_{1-} &= \frac{\tilde{E}_3}{4n_1 n_2} \left(e^{-i k_2 d} (n_1 - n_2)(n_2 + n_3) + e^{i k_2 d} (n_1 + n_2)(n_2 - n_3) \right) \\ &= \frac{\tilde{E}_3}{2n_1 n_2} \left((n_1 n_2 - n_2 n_3) \cos k_2 d + i(n_2^2 - n_1 n_3) \sin k_2 d \right). \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} T &= \frac{k_3}{k_1} \left| \frac{E_3}{E_{1+}} \right|^2 = \frac{n_3}{n_1} \frac{4n_1^2 n_2^2}{(n_1 n_2 + n_2 n_3)^2 \cos^2 k_2 d + (n_2^2 + n_1 n_3)^2 \sin^2 k_2 d} \\ &= \frac{4n_1 n_2^2 n_3}{(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2) \cos^2 k_2 d + (n_2^4 + n_1^2 n_3^2) \sin^2 k_2 d + 2n_1 n_2^2 n_3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{E_{1-}}{E_{1+}} \right|^2 = \frac{(n_1 n_2 - n_2 n_3)^2 \cos^2 k_2 d + (n_2^2 - n_1 n_3)^2 \sin^2 k_2 d}{(n_1 n_2 + n_2 n_3)^2 \cos^2 k_2 d + (n_2^2 + n_1 n_3)^2 \sin^2 k_2 d} \\ &= \frac{(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2) \cos^2 k_2 d + (n_2^4 + n_1^2 n_3^2) \sin^2 k_2 d - 2n_1 n_2^2 n_3}{(n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2) \cos^2 k_2 d + (n_2^4 + n_1^2 n_3^2) \sin^2 k_2 d + 2n_1 n_2^2 n_3}. \end{aligned}$$

となつて、 $T + R = 1$ を満たす。

(b) $n_3 \neq n_1$ のとき、与えられた振動数 ω に対して反射波が存在しないようにしたい。 d と n_2 をどう選べばよいか。

上で求めた E_{1-} を 0 にするには、 $(n_1 n_2 - n_2 n_3) \cos k_2 d$ 、 $(n_2^2 - n_1 n_3) \sin k_2 d$ をともに 0 にする必要がある。 $n_1 \neq n_3$ より、 $\cos k_2 d$ と $n_2^2 - n_1 n_3$ をともに 0 にする。

$$k_2 d / \pi \text{ が半整数 (整数に } 1/2 \text{ を加えた数) かつ、} n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

となるようにすればよい。(手前の面と奥の面での反射波の位相が反対になっている。)

7.2 宿題 [19] (電磁波の反射と屈折; Snell の法則と Fresnel の公式)

2 種類の誘電体が x - y 平面で接した系で、 $z < 0$ を占める誘電体 1 (誘電率 ϵ_1 , 透磁率 μ_1) から $z > 0$ を占める誘電体 2 (誘電率 ϵ_2 , 透磁率 μ_2) に入射する電磁波の反射および屈折を考えよう。

まず、誘電体 1 での電場と磁束密度 ($\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$) と、誘電体 2 での電場と磁束密度 ($\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$) との間に成り立つ境界条件を調べる。自由電流および自由電荷はないとする。境界面に垂直な単位ベクトル $\hat{\mathbf{z}}$, 面内の任意の方向に向いた単位ベクトル \mathbf{t}_0 を考え、 $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{t}_0$ (すなわち、 $\hat{\mathbf{z}}$ と \mathbf{t}_0 の両方に垂直な x - y 面内の単位ベクトル) としよう。

境界面上に、 \mathbf{t}_0 に平行に線分 ℓ をとり、これを囲むような、向かい合う辺が ℓ からそれぞれ $+z, -z$ 方向に微小な長さ h だけずれた長方形 A を考え、その辺からなる積分路 C をとる。Maxwell の方程式より、いま、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ である。

(a) Stokes の定理を用いて C に沿った適当な量の線積分を考え、 $h \rightarrow 0$ の極限をとった後に $\ell \rightarrow 0$ とすることにより、 \mathbf{E}_1 と \mathbf{E}_2 の間に成り立つ式、 \mathbf{B}_1 と \mathbf{B}_2 の間に成り立つ式を、それぞれ \mathbf{t}_0 を用いて表せ。

\mathbf{E} について、Stokes の定理から $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{b} d^2r$ となるので、積分路が誘電体 1 と 2 で逆向きであることに注意して、 $h \rightarrow 0$ の極限をとった後に $\ell \rightarrow 0$ とすれば、境界面の任意の点で

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0$$

を得る。同様に、 \mathbf{B} について、

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{B}_1 / \mu_1 - \mathbf{B}_2 / \mu_2) \cdot \mathbf{t} = 0$$

を得る。

さて、入射する平面波の電場を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ とする (ただし $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}} \geq 0$) と、磁束密度は $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ と書ける。反射波, 屈折波の波数ベクトルをそれぞれ $\mathbf{k}', \mathbf{k}''$ とし、電場をそれぞれ $\mathbf{R}_0 e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega t)}, \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}''\mathbf{r} - \omega t)}$ と表す。 \mathbf{k} が x - z 平面と平行のとき、 \mathbf{k}' と \mathbf{k}'' も x - z 面内にある。 $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ が z 軸の正の向きとなす角 (順に 入射角, 反射角, 屈折角) をそれぞれ φ, ϕ, χ としよう。 \mathbf{E}_0 は \mathbf{k} と直交する。 \mathbf{E}_0 の y 成分を E_s , x - z 面内の成分を E_p とする。ただし、 E_p は $\hat{\mathbf{x}}$ と鋭角をなす向きを正にとる。同様に \mathbf{R}_0 の y 成分を R_s , x - z 面内の成分を R_p 、 \mathbf{D}_0 の y 成分を D_s , x - z 面内の成分を D_p としよう。

以下、簡単のため $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ とする。このとき誘電体 1, 2 中での電磁波の速さは $c_1 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$, $c_2 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}$ で与えられる。 $n_{12} \equiv c_1 / c_2 > 1$ とする。

(b) $\delta_1 = \omega(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1})$ とすると、入射する平面波の各成分は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \cos \varphi \\ E_s \\ -E_p \sin \varphi \end{pmatrix} e^{-i\delta_1}; \quad \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1} \begin{pmatrix} -E_s \cos \varphi \\ E_p \\ E_s \sin \varphi \end{pmatrix} e^{-i\delta_1}. \quad (1)$$

と表される。

$$\delta'_1 = \omega(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_1}), \quad \delta_2 = \omega(t - \frac{x \sin \chi + z \cos \chi}{c_2}) \quad (2)$$

として、同様に反射波, 屈折波の必要な成分を R_s, R_p, ϕ や D_s, D_p, χ などを用いて表し、上で得た境界条件を用いて、下記の Snell の法則および Fresnel の公式を示せ。

$$\sin \varphi = \sin \phi = n_{12} \sin \chi. \quad (3)$$

$$R_p = \frac{\tan(\varphi - \chi)}{\tan(\varphi + \chi)} E_p, \quad D_p = \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)} E_p; \quad (4)$$

$$R_s = -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)} E_s, \quad D_s = \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)} E_s. \quad (5)$$

反射波は

$$(E'_x, E'_y, E'_z) = (R_p \cos \phi, R_s, -R_p \sin \phi) e^{-i\delta'_1}$$

$$(B'_x, B'_y, B'_z) = (-c_1^{-1} R_s \cos \phi, c_1^{-1} R_p, c_1^{-1} R_s \sin \phi) e^{-i\delta'_1}$$

屈折波は

$$(E''_x, E''_y, E''_z) = (D_p \cos \chi, D_s, -D_p \sin \chi) e^{-i\delta_2}$$

$$(B''_x, B''_y, B''_z) = (-c_2^{-1} D_s \cos \chi, c_2^{-1} D_p, c_2^{-1} D_s \sin \chi) e^{-i\delta_2}$$

となる。 $z = 0$ で E と H の接線 (x, y) 成分が連続なので、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ のとき B の接線成分が連続である。 $E_x + E'_x = E''_x$ より

$$E_p \cos \varphi \cdot \exp\left\{\omega\left(t - \frac{x \sin \varphi}{c_1}\right)\right\} + R_p \cos \phi \cdot \exp\left\{\omega\left(t - \frac{x \sin \phi}{c_1}\right)\right\} = D_p \cos \chi \cdot \exp\left\{\omega\left(t - \frac{x \sin \chi}{c_2}\right)\right\}$$

これが任意の x, t で成り立つので、 $(\sin \varphi)/c_1 = (\sin \phi)/c_1 = (\sin \chi)/c_2$ となる。 $n_{12} = c_1/c_2$ より、 $\sin \varphi = \sin \phi = n_{12} \sin \chi$ を得る。 また、 $0 < \varphi < \pi/2 < \phi < \pi$ より、 $\phi = \pi - \varphi$ を得る。

これを上の式に代入して ϕ を消去し、 $(E_p - R_p) \cos \varphi = D_p \cos \chi$ を得る。 また、 $B_y + B'_y = B''_y$ より、 $(E_p + R_p)/c_1 = D_p/c_2$ を得るので、 D_p を消去し、 $c_1/c_2 = \sin \varphi / \sin \chi$ であることを用いて、 R_p が (4) の第 1 式で表されることがわかる。 これより (4) の第 2 式も得られる。

同様に、 $B_x + B'_x = B''_x$ より $(-E_s + R_s) \cos \varphi / c_1 = -D_s \cos \chi / c_2$ 、 $E_y + E'_y = E''_y$ より $E_s + R_s = D_s$ となることを用いて、 (5) を得る。

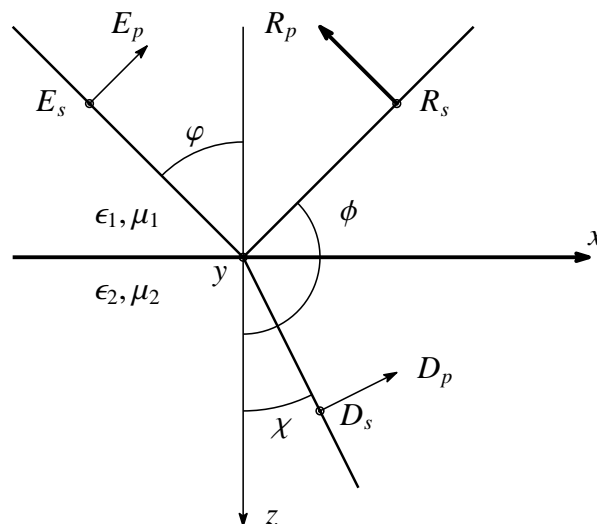


図 8: [19] で考える入射光 (E_s, E_p), 反射光 (R_s, R_p), 屈折光 (D_s, D_p) を図示した。

(ここまで 2013/11/15 配布)

7.3 その場問題 [20] (全反射)

振動数 ω の電磁波が、 $z < 0$ を占める屈折率 n_1 の誘電体から $z > 0$ を占める屈折率 n_2 ($n_2 < n_1$) の誘電体に、入射角 θ で入射する。これらの誘電体はともに非透磁性である。 θ が臨界角 $\theta_c \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1)$ よりも大きいときには全反射が起こるが、その場合でも誘電体 n_2 内にはわずかに電磁波が侵入し、これをエバネッセント (evanescent) 波とよぶ。

入射波の電場ベクトルが入射面 (入射波の波数ベクトルと、境界面の法線ベクトルを含む平面。y-z 平面とする) に垂直である場合を考えよう。なお、このような入射波を直交偏波, TE 波 (transverse electric wave), s (senkrecht) 偏光などと呼ぶ。(入射波の電場ベクトルが入射面に平行であれば、平行偏波, TM 波 (transverse magnetic wave), p (parallel) 偏光などと呼ぶ。)

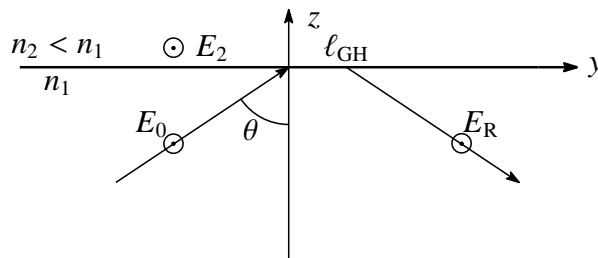


図 9: 屈折率の小さい誘電体への入射で起きる全反射

(a) 入射波の電場ベクトルの振幅を E_0 とするとき、エバネッセント波の電場ベクトル, 磁場ベクトル, および複素ポインティングベクトルとその実部を計算し、電場と磁場がどのような偏光状態にあるかを述べよ。

$k_i \equiv (\omega/c)n_i (i = 1, 2)$ とする。 $n_{12} \equiv n_1/n_2$ と定義すると $n_{12} > 1; \sin \theta > \sin \theta_c = 1/n_{12}$ である。時刻 t の原点を適当に選んで、入射波の電場ベクトルは次のように書ける。

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp i[k_1(y \sin \theta + z \cos \theta) - \omega t] \hat{\mathbf{x}}.$$

反射波の電場ベクトルも入射面に垂直であり、前問 (a) から、誘電体 n_2 内でも電場ベクトルは入射面に垂直となる。それぞれ、

$$\mathbf{E}_o = E_R \exp i[k_1(y \sin \theta - z \cos \theta) - \omega t] \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{E}_2 = E_2 \exp i[k_y y + k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{x}}$$

と書くことにしよう。

屈折角を χ として、スネルの法則を形式的に適用する。(前問で行ったように、電磁場の境界条件を順に調べても同じ結果を得る)

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \chi \quad \therefore \sin \chi = n_{12} \sin \theta > 1.$$

このとき、形式的に

$$(k_y, k_z) = (\sin \chi, \cos \chi) k_2 = \left(n_{12} \sin \theta, \pm i \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1} \right) k_2$$

である。 $z \rightarrow \infty$ で $|\mathbf{E}_2|$ が有界になる解は、複号を + にとったものである。

侵入長を $\ell \equiv \left(k_2 \sqrt{n_{12}^2 \sin^2 \theta - 1} \right)^{-1} = \left(\sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2} \right)^{-1} = (c/\omega) \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}$ と定義すると、

$$\mathbf{E}_2 \equiv \tilde{E}_2 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{x}} = E_2 \exp [i(k_2 n_{12} \sin \theta_1 \cdot x - \omega t) - z/\ell] \hat{\mathbf{x}} = E_2 \exp [ik_1 y \sin \theta - z/\ell] e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{x}}.$$

さて、誘電体 n_2 中の磁束密度 $\mathbf{B}_2 = \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{-i\omega t}$ について、 $\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\partial \mathbf{B}_2 / \partial t$ より、

$$\tilde{B}_{2y} = (i\omega)^{-1} \partial_z \tilde{\mathbf{E}}_2 = i \frac{E_2}{\omega \ell} \exp [ik_1 y \sin \theta - z/\ell];$$

$$\tilde{B}_{2z} = -(i\omega)^{-1} \partial_y \tilde{\mathbf{E}}_2 = -\frac{E_2 k_1}{\omega} \sin \theta \exp [ik_1 y \sin \theta - z/\ell].$$

誘電体 n_1 中の磁束密度の y, z 成分は、

$$\tilde{B}_y = [(E_0 - E_R)k_1 \cos \theta / \omega] \exp [ik_1 y \sin \theta], \quad \tilde{B}_z = -[(E_0 + E_R)k_1 \sin \theta / \omega] \exp [ik_1 y \sin \theta].$$

非透磁性媒質 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) であることに注意して、 $z = 0$ において再び前問 (a) の結果を用い、

$$\begin{cases} (E_0 - E_R)k_1 \cos \theta & = iE_2/\ell. \\ E_0 + E_R & = E_2. \end{cases}$$

これを解いて、

$$\begin{aligned} (E_R, E_2) &= \left(\frac{k_1 \cos \theta - i\ell^{-1}}{k_1 \cos \theta + i\ell^{-1}}, \frac{2k_1 \cos \theta}{k_1 \cos \theta + i\ell^{-1}} \right) \\ &= \left(\frac{k_1^2 \cos^2 \theta - \ell^{-2} - 2ik_1 \ell^{-1} \cos \theta}{k_1^2 \cos^2 \theta + \ell^{-2}}, \frac{2k_1 \cos \theta (k_1 \cos \theta - i\ell^{-1})}{k_1^2 \cos^2 \theta + \ell^{-2}} \right). \end{aligned}$$

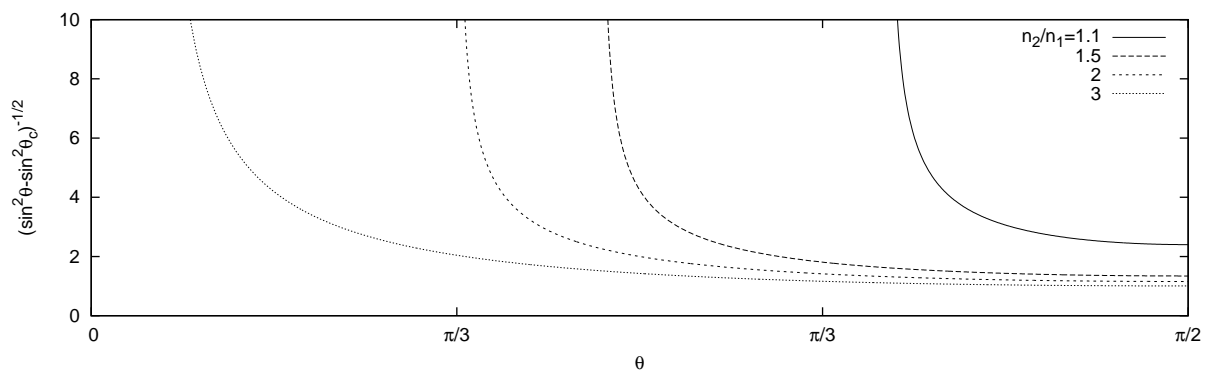
複素ポインティングベクトルとその実部は、

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{2y}^* \\ \tilde{B}_{2z}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{E}_2 \tilde{B}_{2z}^* \\ \tilde{E}_2 \tilde{B}_{2y}^* \end{pmatrix} = \frac{|E_2|^2}{\omega} e^{-2z/\ell} \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \sin \theta \\ i\ell^{-1} \end{pmatrix}, \\ \text{Re} [\mathbf{s}] &= \left[\frac{|E_2|^2}{\omega} e^{-2z/\ell} k_1 \sin \theta \right] \mathbf{y}. \end{aligned}$$

したがって、誘電体 n_2 中で、正味のエネルギーの流れは $\hat{\mathbf{y}}$ 方向にのみ存在する。

(b) エバネッセント波の侵入長は θ とともにどう変化するか。

$\ell = k_1^{-1} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c)^{-1/2}$ である。縦軸に $k_1 \ell$ をとる。



(c) 反射光の位相を調べると、入射光に比べて y 方向にある距離だけずれた位置から戻ってくるように見える。このずれの長さ ℓ_{GH} を求めよ。(グース・ヘンシェンシフト (Hermann Fritz Gustav Goos (1883–1968), Hilda Hänchen (1919–)) という)

上記の E_R の計算結果より、

$$\ell_{\text{GH}} = -\frac{\arg E_2}{k_1 \sin \theta} = \frac{1}{k_1 \sin \theta} \tan^{-1} \frac{2k_1 \ell^{-1} \cos \theta}{k_1^2 \cos^2 \theta - \ell^{-2}}.$$

8 第 8 回問題

8.1 宿題 [21] 非等方な誘電体

非等方な誘電体中の平面電磁波の伝播を考えよう。簡単のため、誘電体は非透磁性 ($\mu = \mu_0$) かつ絶縁体とする。

角振動数 ω の電磁波について、分極ベクトル $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$ は、電場 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ の関数として、線形の範囲で一般に (対称な) 電気感受率テンソル $\chi(\omega)_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\tilde{P}^i(\omega) = \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (1)$$

と書け、電束密度 $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$ は誘電率テンソル $\epsilon(\omega)_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\tilde{D}^i(\omega) = \epsilon_0 \tilde{E}^i + \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) = \sum_{j=1}^3 \epsilon(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (2)$$

と書ける。

以下、 $\epsilon(\omega)_{ij}$ の ω 依存性が無視できるとする。 ϵ_{ij} を対角化する座標軸 (主軸) をとり、対角成分を改めて ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) とし、誘電体中での電束密度の各成分が

$$D_i = \epsilon_i E_i \quad (i = 1, 2, 3; i \text{ に関する和はとらない}) \quad (3)$$

と書けるとしよう (以後添え字は下付きで書く)。波数ベクトル $\mathbf{k} \equiv k \hat{\mathbf{k}}$ の平面電磁波を考える。

(a) 電場ベクトルを $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ とする。 $\tilde{\mathbf{E}}$ が

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (4)$$

を満たすことを示せ。(これより、 $\tilde{\mathbf{D}}$ が \mathbf{k} と直交することがわかる。)

物質中の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{free}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

において $D_i = \epsilon_0 E_i + P_i = \epsilon_i E_i$, $\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ とすると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad \therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

ここで、 $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ とすると、与えられた式を得る。

(b) $v_i \equiv (\mu_0 \epsilon_i)^{-1/2}$ と定義する。電磁波の位相速度 $v = \omega/k$ が方程式

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{k}_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0 \quad (5)$$

を満たすことを確かめよ。また、この方程式は v^2 に関する 2 次方程式であり、その 2 つの解に対応する電磁波が存在することがわかる。それらの電束密度ベクトルが直交することを示せ。

上記で得た式の両辺を k^2 で割り、ベクトル 3 重積の公式を用いる。 $\omega^2 = k^2 v^2$, $\mu_0 \epsilon_i = v_i^{-2}$ より、

$$[\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}})]_i + \frac{v^2}{v_i^2} \tilde{E}_i = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \hat{k}_i - \tilde{E}_i + \frac{v^2}{v_i^2} \tilde{E}_i = 0.$$

ただし、 $|\hat{\mathbf{k}}|^2 = 1$ を用いた。ここで、 $\hat{k}_i v_i^2 / (v_i^2 - v^2)$ との内積をとると、

$$\frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \hat{k}_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v^2} - \hat{k}_i \tilde{E}_i = 0.$$

i について和をとり、 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} (\neq 0)$ で割って、再び $|\hat{\mathbf{k}}|^2 = 1$ を用い

$$\sum_i \frac{\hat{k}_i^2 v_i^2}{v_i^2 - v^2} - \sum_i \hat{k}_i^2 = \sum_i \left(\frac{v_i^2}{v_i^2 - v^2} - 1 \right) \hat{k}_i^2 = \sum_i \left(\frac{v^2}{v_i^2 - v^2} \right) \hat{k}_i^2 = v^2 \sum_i \left(\frac{\hat{k}_i^2}{v_i^2 - v^2} \right) = 0.$$

これは $V \equiv v^2$ に関する 2 次方程式であり、 $0 < v_1 < v_2 < v_3$ とすると、左辺は V の関数として $V \neq v_1^2, v_2^2, v_3^2$ では連続で狭義単調増加かつ、 $V = 0$ で正、 $V \rightarrow v_1^2 - 0, v_2^2 - 0, v_3^2 - 0$ でそれぞれ $+\infty$ に発散、 $V \rightarrow v_1^2 + 0, v_2^2 + 0, v_3^2 + 0$ でそれぞれ $-\infty$ に発散、 $V \rightarrow \infty$ で -0 に向かうので、 $(v_1^2, v_2^2), (v_2^2, v_3^2)$ にそれぞれ 1 個の実解を持つことがわかる。

図形的アプローチ

一般に、偏光の電束密度ベクトル \mathbf{D} は、 $\hat{\mathbf{k}}$ に垂直な平面上を回転する。エネルギーの保存より、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* = \sum_i \frac{|D_i|^2}{\epsilon_i}$$

が保存するので、 $\sum_i (D_i^2/n_i^2) = \sum_i (D_i/n_i)^2$ が保存する。原点を中心とする、 x, y, z 方向に軸をもち、半径が順に n_1, n_2, n_3 の楕円体と、原点を通り $\hat{\mathbf{k}}$ に垂直な平面の交線は楕円となる。 \mathbf{D} はこの楕円上を回転するベクトルに比例する。楕円の長軸方向および短軸方向に \mathbf{D} を持つ直線偏光は、それぞれ、回転しないことがわかる。楕円の長軸と短軸は直交するので、2つの電束密度ベクトルは直交する。

代数的アプローチ

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \hat{k}_i = \left(1 - \frac{v^2}{v_i^2}\right) \tilde{E}_i = \mu_0 (v_i^2 - v^2) \tilde{D}_i$$

なので、 v を固定すると、対応する \tilde{D}_i は $\hat{k}_i / (v_i^2 - v^2)$ に比例することがわかる。2つの v の値を $v_a < v_b$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_a \cdot \tilde{\mathbf{D}}_b &\propto \sum_i \frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_a^2} \frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_b^2} = (v_a^2 - v_b^2)^{-1} \sum_i \left(\frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_a^2} - \frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_b^2} \right) \\ &= (v_a^2 - v_b^2)^{-1} \left(\sum_i \frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_a^2} - \sum_i \frac{\hat{k}_i}{v_i^2 - v_b^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

(c) 複屈折について、簡潔に説明せよ。
略。

8.2 宿題 [22] (円形導波管)

z 軸に沿って伸びた内径 a の円形導波管 (断面が円形で中空の導体管) 内部を伝わる、振動数 ω , 波数ベクトル $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ の電磁波について考える。

(A) 電場 \mathbf{E} , 磁場 \mathbf{B} が $\exp(i(kz - \omega t))$ に比例する場合、円筒座標系 (r, θ, z) で各成分の間に以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$i\omega B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - ikE_\theta, \quad i\omega B_\theta = ikE_r - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad i\omega B_z = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}, \quad (1)$$

$$-i\omega\mu_0\epsilon_0 E_r = \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - ikB_\theta, \quad -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_\theta = ikB_r - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_z = \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta}. \quad (2)$$

(注) ここではは省略している。

真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

において、円筒座標系で

$$\nabla \times \mathbf{A} = (r^{-1}\partial_\theta A_z - \partial_z A_\theta)\hat{\mathbf{r}} + (\partial_z A_r - \partial_r A_z)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r^{-1}\partial_r(rA_\theta) - r^{-1}\partial_\theta A_r)\hat{\mathbf{z}}$$

となることを用いればよい。

(B) $\nabla_t^2 \equiv \nabla^2 - (\partial^2/\partial z^2)$ と定義する。 $B_z = 0$ で、 E_z が方程式

$$\nabla_t^2 E_z + (\mu_0\epsilon_0\omega^2 - k^2)E_z = 0 \quad (3)$$

を満たすものを TM 波 (transverse magnetic wave) と呼ぶ。

(a) TM 波の電場・磁場の解を求めよ。モードごとに決まる、ある振動数 (遮断振動数) より小さな振動数の TM 波は伝播できないことがわかる。

(r, θ) の関数 f について、微分方程式 $(\nabla_t^2 + K)f = 0$ の一般解を求めたい。

$$\nabla_t^2 f = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + r^{-2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

より、 $f(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ の形の解を仮定し、微分を'で表すと、

$$r(rR')'/R + \Theta''/\Theta + Kr^2 = 0. \quad \therefore r(rR')'/R + Kr^2 = -\Theta''/\Theta = \text{const.}$$

境界条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ より、 n を整数として、 $\Theta = e^{in\theta}$ の形となる。このとき、

$$r(rR')' + (Kr^2 - n^2)R = r^2R'' + rR' + (Kr^2 - n^2)R = 0. \quad \therefore R'' + R'/r + (K - n^2/r^2)R = 0.$$

これが $r \rightarrow 0$ で有界な解を持つのは、 $K > 0$ のときで、このとき、 $x \equiv \sqrt{K}r$ とおくと、第 1 種 Bessel 方程式の標準形となるので、 $R(r) \propto J_n(\sqrt{K}r)$ が得られる。境界条件は $E_z(r = a) = 0$ より、 $J_n(\sqrt{K}a) = 0$ 。つまり、 $\sqrt{K}a = \sqrt{\mu_0\epsilon_0\omega^2 - k^2}a$ が $J_n(x)$ の m 個目の零点 j_{nm} に等しくなるとき、 $E_z(r, \theta) = AJ_n(\sqrt{K}r) \exp(in\theta + \phi)$ は TM 波の境界条件を満たす解となる。したがって、 $\omega > \omega_{nm}^{(C)} \equiv j_{nm}c/a$ のときに限り、伝播できる。 $\nu_{nm}^{(C)} \equiv \omega_{nm}^{(C)}/(2\pi)$ を遮断振動数という。

$\kappa \equiv \sqrt{K}$, $A = E_0$, $\phi = 0$ として、上の式を用いて、 $E_z = E_0 J_n(\kappa r) \exp(in\theta)$, $B_z = 0$ 以外の成分を求めよう。第 2,4 式から

$$E_r = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{ik}{\kappa} E_0 J_n'(\kappa r) \exp(in\theta),$$

$$B_\theta = \frac{\omega}{c^2 k} E_r = \frac{ic^{-2}\omega}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{ic^{-2}\omega}{\kappa} E_0 J_n'(\kappa r) \exp(in\theta).$$

第 1,5 式から

$$E_\theta = \frac{ik/r}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} = -\frac{nk}{\kappa^2 r} E_0 J_n(\kappa r) \exp(in\theta),$$

$$B_r = -\frac{\omega}{c^2 k} E_\theta = -\frac{ic^{-2}\omega/r}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} = \frac{nc^{-2}\omega}{\kappa^2 r} E_0 J_n(\kappa r) \exp(in\theta).$$

(b) 上で求めたうち、遮断振動数が最小のモードについて、 z 軸に垂直な断面と z 軸を含む断面それぞれにおける電気力線と磁力線の概略図を描け。

許される κa の値のうち最小のものは、 J_0 の最初の零点 $j_{01} \approx 2.4048$ であり、このとき $n = 0$ である。 $E_\theta = 0$, $B_r = 0$ であり、 $\kappa = j_{01}/a$ を用いて、

$$E_r = \frac{ik}{\kappa} E_0 J_0'(\kappa r) = -\frac{ik}{\kappa} E_0 J_1(\kappa r),$$

$$B_\theta = \frac{ic^{-2}\omega}{\kappa} E_0 J_0'(\kappa r) = -\frac{ic^{-2}\omega}{\kappa} E_0 J_1(\kappa r).$$

よって、 \mathbf{E} は (r, z) 平面上、 \mathbf{B} は θ 方向となる。また、 $x \in (0, j_{01})$ において、 $J_0(x)$ は正で単調減少、 $J_0'(x) = -J_1(x)$ は負で単調減少なので、 $|E_z|$ は r とともに小さく、 $|E_r|$ および $|B_\theta|$ は r とともに大きくなる。

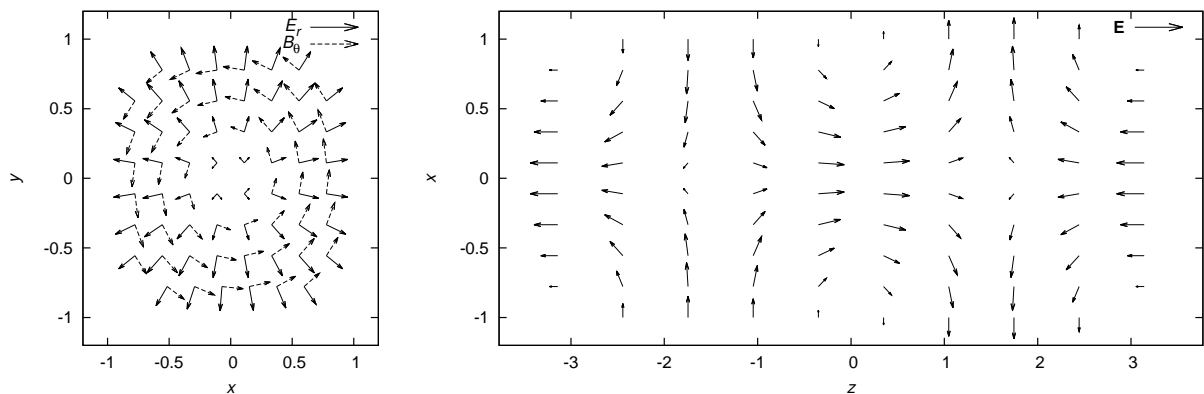


図 10: 遮断振動数が最小のモードについての、 z 軸に垂直な断面と、 z 軸を含む断面における、電場分布と磁束密度分布の概略図。電気力線と磁力線はベクトルをつないで得られる。

9 第 9 回問題

9.1 問題 [23] (円筒形空洞共振器)

内径 a 、長さ d の円筒形空洞共振器内に閉じ込められた TM 波の電場と磁場の空間分布を求めよ。特に、最低共振モードの共振振動数および電場・磁場の空間分布を求め、問題 [8] の結果と比較せよ。

前問の結果より、 κa が第 1 種 Bessel 関数 $J_n(x)$ の m 番目の零点 j_{nm} のとき、

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A & n = 0 \\ Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} & n \geq 1 \end{cases}, \quad k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 - \kappa^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{j_{nm}}{a}\right)^2$$

として、

$$E_r = \frac{ik}{\kappa^2} \partial_r E_z = \frac{ik}{\kappa} E_0 J'_n(\kappa r) \Theta(\theta) e^{i(kz - \omega t)};$$

$$E_\theta = \frac{ik}{\kappa^2 r} \partial_\theta E_z = \frac{nk}{\kappa^2 r} E_0 J_n(\kappa r) (-Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}) e^{i(kz - \omega t)}.$$

k を $-k$ で置き換えれば $-z$ 方向へ進行する波を得る。これらの波を加えて、 $E_r(z=0, d) = E_\theta(z=0, d) = 0$ としたい。 kd が π の整数倍 ($k = l\pi/d, l = 0, 1, 2, \dots$) のときはこれが可能で、このとき、

$$E_z = E_0 J_n(\kappa r) \Theta(\theta) \cos(kz) e^{-i\omega t}, \quad B_z = 0,$$

$$E_r = -\frac{k}{\kappa} E_0 J'_n(\kappa r) \Theta(\theta) \sin(kz) e^{-i\omega t}, \quad B_\theta = \frac{i\mu_0\epsilon_0\omega}{\kappa} E_0 J'_n(\kappa r) \Theta(\theta) \cos(kz) e^{-i\omega t},$$

$$E_\theta = \frac{ink}{\kappa^2 r} E_0 J_n(\kappa r) (-Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}) \sin(kz) e^{-i\omega t}, \quad B_r = \frac{\mu_0\epsilon_0\omega}{\kappa^2 r} E_0 J_n(\kappa r) (Ae^{in\theta} - Be^{-in\theta}) \cos(kz) e^{-i\omega t}.$$

$(n, m, l) = (0, 1, 0)$ のとき最低共振モードとなり、

$$(\omega_{\min}/c)^2 - (j_{01}/a)^2 = k^2 = 0 \quad \therefore \omega_{\min} = \frac{j_{01}c}{a}.$$

このとき $\kappa = \omega_{\min}/c = j_{01}/a$ であり、

$$E_z = E_0 J_0(\kappa r) e^{-i\omega t} = E_0 J_0(j_{01}r/a) e^{-i\omega t}, \quad E_r = E_\theta = 0$$

$$B_\theta = -\frac{i\mu_0\epsilon_0\omega_{\min}}{\kappa} E_0 J_1(\kappa r) e^{-i\omega t} = -\frac{i}{c} E_0 J_1(j_{01}r/a) e^{-i\omega t}, \quad B_z = B_r = 0.$$

となって、[8] の結果が再現される。

9.2 宿題 [24] (Trouton-Noble のパラドックス)

真空中で、2つの慣性系、実験室系 (K 系) と、 x 方向に速さ v で動く観測者から見た系 (K' 系) を考える。重力の影響は考えない。時刻 $t = 0$ に、両系の原点が一致するものとする。

(A) K 系で観測される電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を、K' 系で見た電場 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$ と磁束密度 $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ の直交座標系での各成分を用いて表せ。ここで、 $\beta \equiv v/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を用いて、

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}; t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad (1)$$

である。

K 系は K' 系に対して速度 $-\mathbf{v} \equiv -v\hat{\mathbf{x}}$ で動くので、

$$\begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ E_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x(\mathbf{r}, t) \\ \gamma(E'_y(\mathbf{r}, t) + vB'_z(\mathbf{r}, t)) \\ \gamma(E'_z(\mathbf{r}, t) - vB'_y(\mathbf{r}, t)) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} B_x(\mathbf{r}, t) \\ B_y(\mathbf{r}, t) \\ B_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_x(\mathbf{r}, t) \\ \gamma(B'_y(\mathbf{r}, t) - \frac{\beta}{c}E'_z(\mathbf{r}, t)) \\ \gamma(B'_z(\mathbf{r}, t) + \frac{\beta}{c}E'_y(\mathbf{r}, t)) \end{pmatrix}.$$

(詳しくは、たとえば 砂川重信『理論電磁気学 第3版』(紀伊國屋書店, 1999) 第11章 §2 参照)

絶縁体の充分硬い棒があり、端 A には q の、端 B には $-q$ の電荷が固定されている。 $t < 0$ においては、棒は駆動装置に固定され、K 系で見ると、 x - y 平面上で AB 方向の単位ベクトル \mathbf{e} が x 軸と角度 θ をなすように、速度 $\mathbf{v} \equiv v\hat{\mathbf{x}}$ で運動していた。以下では、 $v \ll c$ として、Lorentz 収縮の影響などは無視する。 $(\gamma \approx 1 + \beta^2/2)$ を 1 と近似してよい)

(B) 棒の長さを ℓ とし、棒の midpoint が $t = 0$ に原点 O に到達するものとする。 $t = 0$ に棒の固定を取り外した後の棒の運動を考えよう。

(a) K' 系でこの系を見たときには、棒は静止を続けるはずである。端 A, B において、それぞれ他方の端にある電荷によって作られる電場 $\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2$ を、 $E \equiv q/(4\pi\epsilon_0\ell^2)$ を用いて表せ。

ℓ 離れているので、

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}'_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ell^2}\mathbf{e} = E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $t = 0$ において、K 系で見たときの端 A, B における電場 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ と磁束密度 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ を求め、端 A にある電荷に働く Coulomb 力 \mathbf{f}_1 と Lorentz 力 \mathbf{F}_1 , 端 B にある電荷に働く Coulomb 力 \mathbf{f}_2 と Lorentz 力 \mathbf{F}_2 をそれぞれ求めよ。

$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ である。上記の Lorentz 変換の式より、

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma\beta\sin\theta \end{pmatrix}; \mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 = q\mathbf{E}_1 = qE \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 = -\gamma\beta^2 qE \sin\theta \hat{\mathbf{y}}.$$

(この時点で $\gamma \approx 1$ としてもよい)

(c) Lorentz 力のモーメント \mathbf{N} を求めよ。また、電磁場が端 A の電荷にする仕事率 W_1 , 端 B の電荷にする仕事率 W_2 を求めよ。

$OA = -\ell\mathbf{e}/2, OB = \ell\mathbf{e}/2$ より、

$$\mathbf{N} = OA \times \mathbf{F}_1 + OB \times \mathbf{F}_2 = \gamma\beta^2 qE\ell \cos\theta \sin\theta \hat{\mathbf{z}}.$$

$$W_1 = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{v} = qEv \cos \theta; W_2 = (\mathbf{f}_2 + \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{v} = -qEv \cos \theta.$$

$\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ であるが、(a) で考えたように \mathbf{K}' 系ではこの棒は静止を続けるので、 \mathbf{K} 系でこの系を見たときにも、棒は回転を始めずに、速度 \mathbf{v} で運動を続けると考えられる。その理由を考えよう。

電磁場のエネルギーの流れの密度が Poynting ベクトル $\mathbf{s} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で表され、これに伴う運動量の密度 $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ が存在するように、一般に、エネルギーの流れの密度 \mathbf{s} には運動量密度 $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{s}$ が付随する。

(d) 棒の断面を単位時間に通過するエネルギーの流れ \mathbf{S} を求めることにより、長さ ℓ のこの棒全体での、エネルギーの流れに伴う運動量の総量 \mathbf{p} と、棒の中心が位置 $\mathbf{r}(= t\mathbf{v})$ に到達したときにおける、この運動量の点 \mathbf{O} に関するモーメント (角運動量) \mathbf{L} を求めよ。

(c) より $\mathbf{S} = W_1 \mathbf{e} = qEv \cos \theta \mathbf{e}$ となるので、

$$\mathbf{p} = \frac{\ell \mathbf{S}}{c^2} = \frac{\beta q E \ell \cos \theta}{c} \mathbf{e}; \quad \mathbf{L} = t\mathbf{v} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p} = t\beta^2 q E \ell \cos \theta \sin \theta \hat{\mathbf{z}}.$$

ただし、棒が速度 \mathbf{v} で運動していることの影響を無視した。

(e) \mathbf{L} と \mathbf{N} の関係を考え、電磁場が棒に加える回転力のモーメント \mathbf{N} がなぜ棒の回転を生じないのか議論せよ。

$v \ll c$ とする近似のもとで、 $1 - \gamma \approx \beta^2/2 \ll 1$ なので、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

となっている。すなわち、 \mathbf{K} 系で見ると、棒の中のエネルギー流に伴う運動量 \mathbf{p} の原点回りのモーメントの増加が、電磁場が棒に加える回転力のモーメント \mathbf{N} と等しいので、電磁場は棒に回転力を働かせるが、棒は回転を始めない。

10 第 10 回問題

10.1 宿題 [25] (レンズによる光の屈折)

空気 (屈折率 1 とみなす) 中に置いたガラス (屈折率 n) の球面レンズによる光の屈折を考える。
 (a) まず、半径 r の球面を考え、光軸 (球面の中心) 上で球面の外側の点 P から出た光が球面の内側の点 Q に集まるとして、Snell の法則を用いて、近軸近似のもとで、点 P, Q の位置の満たす関係を求めよ。

空気の屈折率を $n' \equiv 1$ としておく。球面の中心を O , 屈折点 R から光軸におろした垂線の長さを h , 垂線の足を H とする。 $a \equiv PH$ と $q \equiv HQ$ と r の関係を求めればよい。入射角を φ , 屈折角を χ とし、 $\alpha \equiv \angle RPH, \beta \equiv \angle RQH, \gamma \equiv \angle ROH$ とすると、 $h = a \tan \alpha = q \tan \beta = r \tan \gamma$ がわかる。 $\varphi, \chi, \theta \ll 1$ として、近軸近似より $h = a\alpha = q\beta = r\gamma$ と近似できる。ここで、Snell の法則より、 $n'\varphi = n\chi$ と近似できるので、 $n'(\alpha + \gamma) = n(\gamma - \beta)$,

$$n'\alpha + n\beta = (n - n')\gamma \quad \therefore \frac{n'}{a} + \frac{n}{q} = \frac{n - n'}{r}; \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{q} = \frac{n - 1}{r}.$$

(b) 一方の面が半径 $r (> 0)$ の球面、他方の面が半径 $r' (< 0)$ の球面である十分に薄い球面レンズについて、 $1/f = (n - 1)((-r')^{-1} + r^{-1})$ とすると、光軸上でレンズの手前側の距離 a の点から出た光がレンズの奥側の距離 b の点に集まったとすると、 $1/a + 1/b = 1/f$ となることを示せ。ただし、曲率半径は、手前側に凸のときに正となるように定義する。

レンズが十分に薄いので、レンズの中心を原点とし、レンズの手前側を正とする座標をとると、上の結果で、 a の位置から出た光は $-q$ の位置に集まる。手前の球面で屈折率 n' の空気中から屈折率 n のガラスに入射するとき屈折した光は $-q$ の位置にある点 Q に像を作るように進むが、奥の球面で屈折率 n のガラス中から屈折率 n' の空気に入射するとき屈折されて結局 $-b$ の位置にある点 B に集まるので、上の結果を用いて、

$$\frac{n}{-q} + \frac{n'}{b} = \frac{n' - n}{r'}$$

となる。辺ごとに加えて、 $n' = 1$ を用いると

$$n'(1/a + 1/b) = (n - n')(1/r - 1/r') = 1/f \quad \therefore 1/a + 1/b = 1/f$$

となることがわかる。

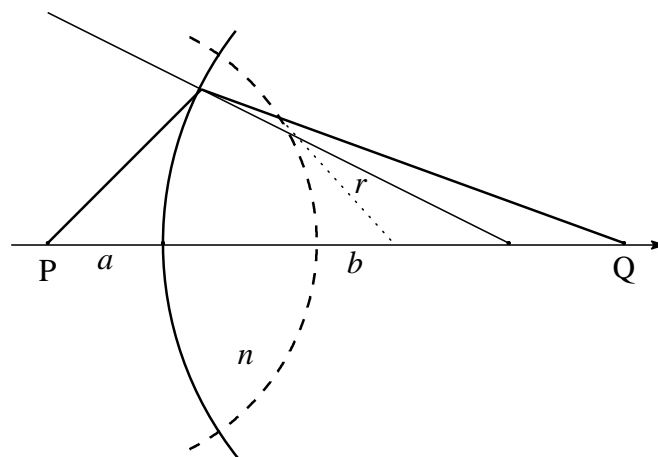


図 11: 球面、薄い球面レンズによる光の屈折

(ここまで 2013/12/6 配布)

10.2 宿題 [26] (同軸ケーブル)

半径 a の円柱状導体を内径 $b (> a)$ の中空円筒状導体で囲った同軸ケーブル (Oliver Heaviside (1850–1925) による発明 (1880)) が、 z 軸に沿って伸びている。その中空部分には非散逸性誘電体 (誘電率 ϵ , 透磁率 μ) が一様に満たされている。位置 $z = 0$ で、二つの導体間に交流電圧 $V = V_0 \exp(-i\omega t)$ をかけたとき、ケーブル内を z 方向へ伝わる TEM 波 ($E_z = 0, B_z = 0$ の電磁波) について考える。二つの導体は完全導体であるとみなす。

(a) 問題 [22](A) の関係式を用いて、電場と磁場の分布を求めよ。

回転対称性より $E_\theta = 0$ となる。自由電荷がないので $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ より、電場を $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} e^{i(kz - \omega t)}$ と書いたときの、円柱座標系での $\tilde{\mathbf{E}}$ の各成分 (E_r, E_θ, E_z) について、

$$\frac{1}{r} \partial_r (r E_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta E_\theta + i k E_z = 0.$$

$E_z = 0$ なので、第 1 項も 0 となり、 $r E_r e^{i(kz - \omega t)} = V_c e^{i(kz - \omega t)}$ と書ける。

$$\int_a^b E_r dr = V_c \ln \frac{b}{a} = V_0 \quad \therefore V_c = (\ln(b/a))^{-1} V_0.$$

磁束密度についても、同様に $\tilde{\mathbf{B}}$ の各成分を (B_r, B_θ, B_z) と書く。[22](A) の関係式より、 $E_z = E_\theta = 0$ のとき $B_r = 0, B_\theta = (k/\omega) E_r$ を得る。また、 $\mu \epsilon \omega E_r = k B_\theta$ より、 $k = \sqrt{\mu \epsilon} \omega$ がわかる。よって、 $B_\theta = \sqrt{\mu \epsilon} E_r = \frac{\mu}{r} V_c$ となる。

(b) 位置 $z = 0$ で、一方の導体を流れる電流を $I = I_0 \exp(-i\omega t)$ としたとき、このケーブルの特性インピーダンス $Z_c \equiv V/I = V_0/I_0$ を求めよ。 $\epsilon \approx \epsilon_0, \mu \approx \mu_0$ のとき、 Z_c はおよそどの程度の値となるか。

内側の導体表面の z 方向に幅 Δz の部分の面積は $\Delta S = 2\pi a \Delta z$ である。この部分の電荷を ΔQ とすると、 $E_r(r = a) = V_c/a$ より、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ を用いて、 $\epsilon E_r \Delta S = \Delta Q \quad \therefore \Delta Q = 2\pi \epsilon V_c \Delta z$ 。単位長さあたり $Q = 2\pi \epsilon V_c$ の電荷が、 $v = \omega/k$ の速さで流れるので、

$$I = Qv = 2\pi \sqrt{\epsilon/\mu} \cdot (\ln(b/a))^{-1} V \quad \therefore Z_c = V/I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 376.73 \dots [\Omega]$$

は真空のインピーダンスと呼ばれる。 $\epsilon \approx \epsilon_0, \mu \approx \mu_0, b/a \approx e$ のとき、 $Z_c \approx Z_0/(2\pi) \sim 60 [\Omega]$ 。市販の同軸ケーブルの多くは 50Ω か 75Ω である。

(c) 複素ポインティングベクトルおよび、単位時間あたりのエネルギーの流れの時間平均 P を求めよ。 $P = I^* \cdot V/2$ が成り立っていることを確かめよ。

$$\mathbf{s} \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*}{2\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V_c^2}{2r^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

断面を S_\perp として、

$$P = \int_{S_\perp} dx dy dz = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_a^b \frac{2\pi r V_c^2}{2r^2} dr = \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} V_c \ln \frac{b}{a} = \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\ln \frac{b}{a})^{-1} V_0^2.$$

また、

$$I^* \cdot V/2 = \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\ln \frac{b}{a})^{-1} V^* \cdot V$$

であり、 $V^* \cdot V = V_0^2$ なので、 $P = I^* \cdot V/2$ となっている。

10.3 問題 [27]: 小レポート 3 (提出期限 2013 年 12 月 20 日 (金) 16:30)

(A) 一般に、屈折率 $n(\mathbf{r})$ が空間的にゆるやかに変化する媒質中での光線の軌跡は、アイコナル (eikonal) 近似のもとで

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}) \quad (1)$$

と記述される。ここに s は光線に沿って測った軌跡の長さである。いま、 z 軸に沿って伸びた光ファイバーがあり、その内部の屈折率 $n(x)$ は $|x|$ の減少関数である。原点 $(x, z) = (0, 0)$ から z 軸と角度 $\theta(0)$ をなす方向に発進した光線が $x-z$ 面内を伝播するとき、軌跡に沿って x がとりうる最大値を x_{\max} とする。光線の軌跡は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}}{\bar{n}} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\bar{n} \equiv n(x_{\max}) = n(0) \cos[\theta(0)]$ である。

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ とすると、与えられた式で $(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$, $d\mathbf{r}/ds = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ となることより、

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} n \sin \theta \\ n \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dn}{ds} \\ 0 \end{pmatrix} \therefore n \cos \theta = n(x=0) \cos \theta(0) = \bar{n}; \quad \frac{dx}{dz} = \tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{\bar{n}^2}{n(x)^2}}}{\bar{n}/n(x)} = \frac{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}}{\bar{n}}.$$

(B) 屈折率 $n(x)$ が x とともにゆるやかに変動する媒質中を $x-z$ 面内に沿って z 方向へ進む光線の $z = z_1$ から $z = z_2$ までの軌跡は、フェルマー (Pierre de Fermat (1607?-1665)) の原理によれば、変分条件

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} dz \mathcal{L}(x, x', z) = 0, \quad \mathcal{L}(x, x', z) = n(x) \sqrt{1 + x'^2}, \quad x' \equiv \frac{dx}{dz} \quad (3)$$

から決定される。これに対応するオイラー (Leonhard Euler (1707-1783)) 方程式を書き、光線の方程式が

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] \quad (4)$$

となることを示せ。また、式 (2) が、この関係式を満たしていることを示せ。

z での微分を ' で表す。オイラー方程式は

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

と書ける。与えられた \mathcal{L} の表式を代入、整理する。 $dn(x)/dz = n'(x)x'$ などに注意すると、

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{1+x'^2}} - \frac{x'x''}{(1+x'^2)^{3/2}} \right) n(x) + \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} x' n'(x) = \sqrt{1+x'^2} n'(x) \therefore x'' = \frac{n'(x)(1+x'^2)}{n(x)}$$

を得る。(2) について、 $1+x'^2 = n^2(x)/\bar{n}^2$ であり $x' = \sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}/\bar{n}$ と書けることを用いれば、

$$x'' = \frac{x'}{\bar{n}} n'(x) \frac{n(x)}{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}} = \frac{n'(x)n(x)}{\bar{n}^2} = \frac{n'(x)(1+x'^2)}{n(x)}.$$

(C) 屈折率が $n(x) = n(0)/\cosh(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) で与えられるグレーデッド (graded) 型光ファイバー内を x - z 面内に沿って伝播する光線について考える。

(a) x から t への変数変換

$$\sinh(\alpha x) = \sinh(\alpha x_{\max}) \sin t \tag{5}$$

を用いて、光線の軌跡が、

$$\sin(\alpha z) = \sinh(\alpha x) / \sinh(\alpha x_{\max}) \tag{6}$$

と表されることを示し、 $\theta(0) = \pi/6, \pi/4$ の場合について、 x - z 面上に軌跡のグラフを描け。

表 2: $t, \sin t, x$ の変化

t	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
$\sin t$	0 ↗	1 ↘	-1 ↗	0
x	0 ↗	x_{\max} ↘	$-x_{\max}$ ↗	0

(5) において、 t は $x = 0$ のときに 0 で、 x の増加とともに単調に増加し、 $x = x_{\max}$ のときに $t = \pi/2$ に達し、その後 x が減少に転じても増加し続ける ($\sin t$ は減少する) ものとする。

(5) の両辺を微分して、

$$\alpha \cosh(\alpha x) dx = \sinh(\alpha x_{\max}) \cos t dt.$$

また、(2) より、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\operatorname{sech}(\alpha x_{\max})}{\sqrt{\operatorname{sech}^2(\alpha x) - \operatorname{sech}^2(\alpha x_{\max})}} = \frac{\cosh(\alpha x)}{\sqrt{\sinh^2(\alpha x_{\max}) - \sinh^2(\alpha x)}} = \frac{\cosh(\alpha x)}{\sinh(\alpha x_{\max}) \cos t} = \frac{1}{\alpha} \frac{dt}{dx}$$

となるので、

$$z = \int_0^x \frac{dz}{dx} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \frac{dt}{dx} dx = \frac{t}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sin^{-1} \left(\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha x_{\max})} \right)$$

より (6) を得る。 $n(0) \cos(\theta(0)) = n(x_{\max}) = n(0) \operatorname{sech}(\alpha x_{\max})$ より $\cosh(\alpha x_{\max}) = \sec \theta(0)$ であり、

$$\sinh(\alpha x_{\max}) = \sqrt{\cosh^2(\alpha x_{\max}) - 1} = \sqrt{\sec^2 \theta(0) - 1} = \tan \theta(0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & \theta = \pi/6 \\ 1 & \theta = \pi/4 \end{cases}.$$

これを用いて、図 12 を得る。(z は x の関数として多価なので、逆に z から $\sinh(\alpha x) = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$ を求め、 $e^{\alpha x}$ に関する 2 次方程式を解いて x を得るとよい)

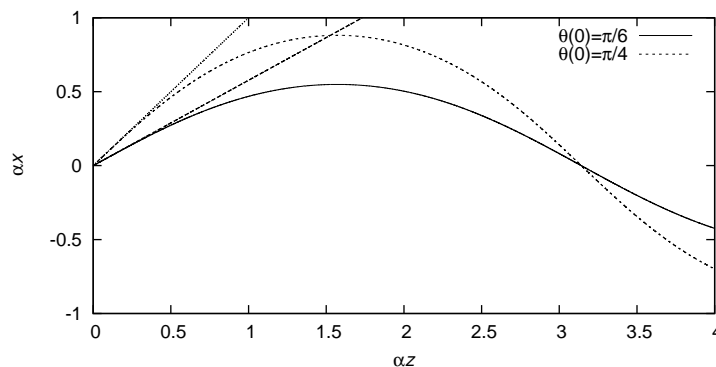


図 12: 光線の軌跡。 z 軸と角度 $\theta(0) = \pi/6, \pi/4$ をなす直線も示した。

(b) 光線の半周期 Z (光線が z 軸を一度横切ってから再び横切るまでに z 方向に進む距離) を求め、それが発信角 $\theta(0)$ によらないことを示せ。

上記 (a) で得た結果より、

$$Z = 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dz}{dx} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha(x=x_{\max})} dt = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

これは $\theta(0)$ に依存しない。

(c) 半周期の光路長

$$L_{\text{opt}} \equiv 2 \int_{x=0}^{x=x_{\max}} ds n(x) \quad (7)$$

を計算し、発信角によらず $L_{\text{opt}} = n(0)Z$ となることを示せ。(一般の光ファイバーでは、 L_{opt} と $n(0)Z$ の比は 1 からわずかにずれ、そのずれは発信角に依存する。)

$\cosh^2(\alpha x) = \sinh^2(\alpha x) + 1 = \sinh^2(\alpha x_{\max}) \sin^2(\alpha z) + 1, t = \alpha z$ なので、

$$L_{\text{opt}} = \int_0^Z \frac{n^2(x)}{\bar{n}} dz = \frac{n(0)}{\cos \theta(0)} \int_0^Z \frac{dz}{\cosh^2(\alpha x)} = \frac{n(0)}{\alpha \cos \theta(0)} \int_0^\pi \frac{dt}{\sinh^2(\alpha x_{\max}) \sin^2 t + 1}.$$

$A \equiv \sinh^2(\alpha x_{\max}) > 0$ について、積分公式

$$\int_0^\pi \frac{d\zeta}{A \sin^2 \zeta + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{A+1}}$$

(Γ 関数, B 関数を使って示せる) が成り立つので、これを用いる。 $\sqrt{A+1} = \cosh(\alpha x_{\max}) = \sec \theta(0)$ により、

$$L_{\text{opt}} = \frac{n(0)}{\alpha \cos \theta(0)} \frac{\pi}{\cosh(\alpha x_{\max})} = n(0) \frac{\pi}{\alpha} = n(0)Z.$$

11 第 11 回問題

11.1 宿題 [28] (キルヒホッフの積分公式)

小さな穴を通る電場の回折を次の手順で議論せよ。

(a) 3次元空間中で定義された、十分な回数微分可能な関数 $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ を考える。 $\hat{\mathbf{n}}$ を、空間中の領域 V の表面 ∂V の、 V の内側から外側に向く単位法線ベクトルとする。ガウスの発散定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \tag{1}$$

を用いて、以下の式(グリーンの公式)が成り立つことを確かめよ。

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \tag{2}$$

$\phi \nabla^2 \psi = \nabla(\phi \nabla \psi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)$ より、 $\int_V \phi \nabla^2 \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS - \int_V (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \, d\mathbf{x}$ である。この式から ϕ と ψ を交換したものを辺々引くことで Green の公式を得る。

(b) スカラー場 $\varphi(\mathbf{x})$ がヘルムホルツ方程式 (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894))

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

を満たすとする。このヘルムホルツ方程式のグリーン関数は

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{4}$$

で与えられる。式(2)に φ, G を代入することで

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} [\varphi(\mathbf{x}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \varphi(\mathbf{x}')] \, dS' \tag{5}$$

となることを示せ。ここで $\hat{\mathbf{n}}'$ は表面 ∂V の単位法線ベクトルで外側から内側を向く。また、 ∇' は \mathbf{x}' での微分を表す。

グリーンの公式の左辺に $\phi = \varphi(\mathbf{x}')$ と $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ を代入して \mathbf{x}' で積分する。

$$\begin{aligned} & \int_V [\varphi(\mathbf{x}') \nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla'^2 \varphi(\mathbf{x}')] \, d\mathbf{x}' \\ &= \int_V [\varphi(\mathbf{x}') \{-k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \{-k^2 \varphi(\mathbf{x}')\}] \, d\mathbf{x}' = -\varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

また、グリーン関数の右辺は、 $\int_{\partial V} [\varphi(\mathbf{x}') \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla' \varphi(\mathbf{x}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS'$ である。単位法線ベクトルの向き $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}'$ に注意することで問題文の式が得られる。

(c) ここで、無限に広がる空間で外向きに伝播する解 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = e^{ikr}/(4\pi r)$ をグリーン関数として選ぶ。ただし $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ とする。境界面 ∂V 上での積分を、境界面上にある穴 S 上のみの面積分に置き換えることで、回折場が

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \left[\nabla' \varphi + ik \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \varphi \right] \, dS' \tag{6}$$

(キルヒホッフの積分公式) となることを示せ。

$\nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \nabla' \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ を計算すればよい ($\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', r = |\mathbf{r}|$)

$$\nabla' \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r} \right).$$

これを整理して、問題文の式を得る。

11.2 宿題 [29] (完全導体にあいた穴による回折)

x - y 平面に完全導体のシートがあり、長方形の穴があいている。長方形は $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$ にあるものとする ($b \geq a$)。このシートに垂直に平面波電場が入射する。このとき偏光ベクトルは y 軸と β の角度をなすものとする。

(a) キルヒホッフの積分公式を用いて、回折した電場の遠方 ($R \equiv |\mathbf{x}| \gg a, b$) での振舞を計算せよ。入射する電場 $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{x}')$ は

$$\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} E_0 \sin \beta e^{i(kz - \omega t)} \\ E_0 \cos \beta e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。Kirchhoff の公式で $\mathbf{n}' = (0, 0, 1)$ を使うと回折電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{ikr}}{r} \left[(\partial_{z'} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{x}')) + ik \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{z - z'}{r} \mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{x}') \right] dS'$$

なので各成分は次のように表せる ($r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$):

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} E_0 \sin \beta e^{-i\omega t} ik \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} dy' \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{z}{r} \right], \\ E_y(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} E_0 \cos \beta e^{-i\omega t} ik \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} dy' \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{z}{r} \right], \\ E_z(\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned}$$

このままでは積分ができないので、 $|\mathbf{x}| \gg a, b$ として r を $|\mathbf{x}'|/|\mathbf{x}|$ で展開する:

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}'|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')]^{1/2} \simeq |\mathbf{x}| \left[1 - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^2} \right] = R \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{R} \right).$$

ここで $R = |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/R$ とした。この展開で $e^{ikr} = e^{ik(R - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}')} = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{R} \right)$ となる。従って、

$$\frac{e^{ikr}}{r} \left[1 + \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{z}{r} \right] \simeq \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'} \left(1 + \frac{z}{R} \right)$$

である。この近似のもとで回折電場の積分は

$$\frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'} = \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{4R^2 \sin \frac{kax}{R} \sin \frac{kby}{R}}{k^2 xy}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} E_0 ik \sin \beta \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{4R^2 \sin \frac{kax}{R} \sin \frac{kby}{R}}{k^2 xy}, \\ E_y(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} E_0 ik \cos \beta \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R} \left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{4R^2 \sin \frac{kax}{R} \sin \frac{kby}{R}}{k^2 xy}, \\ E_z(\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned}$$

である。

(b) 回折場の単位立体角あたりのパワーを計算せよ。

磁束密度については、入射波が

$$\mathbf{B}_{\text{in}} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\omega} E_0 \cos \beta e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{k}{\omega} E_0 \sin \beta e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_{\text{in}y} \\ E_{\text{in}x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので、回折磁束密度は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_y(\mathbf{x}, t) \\ E_x(\mathbf{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。このため、時間平均をした Poynting ベクトルは

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = \frac{1}{2} \frac{k}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |E_x|^2 + |E_y|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |E_x|^2 + |E_y|^2 \end{pmatrix}$$

となり、回折電磁場の全エネルギー流束量は

$$P = \int_{\text{半径 } R \text{ の球面上}} \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega$$

である ($d\Omega$ は球面上の微小立体角要素)。よって、求めるパワーは

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} R^2 = \bar{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{x}} R^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|E_x|^2 + |E_y|^2) \frac{z}{R} R^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} k^2 \frac{z}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \left(\frac{4R^2 \sin \frac{kax}{R} \sin \frac{kby}{R}}{k^2 xy}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。

たとえば $(x, y, z) = (0, 0, R)$ を代入すると

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} k^2 \frac{R}{R} \left(1 + \frac{R}{R}\right)^2 \left(4R^2 \frac{a}{R} \frac{b}{R}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (kab)^2.$$

12 第 12 回問題

13 第 13 回問題

14 補充問題

14.1 宿題 [36]

電荷 q の荷電粒子が誘電体中を速度 \mathbf{v} で等速運動をしている。誘電率 $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換を $\hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ とする (\mathbf{k} は波数ベクトルで ω は振動数)。この場合に単位時間あたりに電場が失うエネルギーについて考察する。

(a) 誘電体中の電荷密度は $\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ である。電荷密度のフーリエ変換 $\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \frac{1}{2\pi} \int dt \rho(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t}$$

を計算し、

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

となることを示せ。電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換 $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega)$ も求めよ。

デルタ関数は $\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$ となることに注意する。電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ を空間と時間についてフーリエ変換したものの $\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \frac{1}{2\pi} \int dt q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \frac{1}{2\pi} \int dt q \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{v}t) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' \frac{1}{2\pi} \int dt q \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \right] e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v} + \omega)t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' \frac{1}{2\pi} \int dt q\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v} + \omega)t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi} \int dt q e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} + \omega)t} = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega) \end{aligned}$$

電流密度は $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ であるから、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \frac{1}{2\pi} \int dt q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega) \end{aligned}$$

となる。

(b) 誘電体中の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ がスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ だけで決定されると近似する ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$)。このときスカラーポテンシャルのフーリエ変換が

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{|\mathbf{k}|^2 \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)}$$

となることを示せ。

電束密度と誘電率と電場の関係はフーリエ空間 (\mathbf{k}, ω) で $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$ となっているものとする。このとき、Maxwell 方程式の Gauss 則 $\nabla\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$ をフーリエ変換したもので書くと、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot \int d\mathbf{k}d\omega \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)} \\ &= \nabla \cdot \int d\mathbf{k}d\omega \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)} \\ &= \int d\mathbf{k}d\omega \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)[i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)} \\ &= \int d\mathbf{k}d\omega \hat{\rho}(\mathbf{k}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}\end{aligned}$$

である。よって、 $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\rho}(\mathbf{k}, t)/\hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ である。一方で、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ より $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{k}\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega)$ である。この二つを組合せて、

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{|\mathbf{k}|^2\hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)}$$

を得る。

- (c) 電荷が電場からされる仕事率は $dW/dt = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}d\mathbf{x}$ で与えられる。上の (a)、(b) の結果を用いて荷電粒子がされる仕事率が

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{i\omega}{|\mathbf{k}|^2} \hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

となることを示せ。この符号を反転させると、電場が単位時間あたりに失うエネルギーになる。つまり、このエネルギー損失を測定すれば物質の誘電率についての情報が得られることになる。

$$\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}d\mathbf{x} = \int \mathbf{j} \cdot (-\nabla\phi)d\mathbf{x} = - \int \nabla \cdot (\phi\mathbf{j})d\mathbf{x} + \int \phi(\nabla \cdot \mathbf{j})d\mathbf{x}$$

である。最後の第一項は無限遠での表面積分になるのでゼロになる。また、電荷保存則から $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t\rho$ であることを使うと、

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \int \phi(-\partial_t\rho)d\mathbf{x} \\ &= \int d\mathbf{x} \left[\int d\mathbf{k}'d\omega' \hat{\phi}(\mathbf{k}', \omega') e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}+\omega't)} \right] (-\partial_t) \left[\int d\mathbf{k}d\omega \hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)} \right] \\ &= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k}'d\omega'd\mathbf{k}d\omega \hat{\phi}(\mathbf{k}', \omega')(-i\omega)\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) e^{i[(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}+(\omega'+\omega)t]} \\ &= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{k}'d\omega'd\mathbf{k}d\omega \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}', \omega')}{|\mathbf{k}'|^2\hat{\epsilon}(\mathbf{k}', \omega')}(-i\omega)\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) e^{i[(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}+(\omega'+\omega)t]}\end{aligned}$$

となる。 \mathbf{x} での積分は $\int e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k})$ となり、次に \mathbf{k}' で積分をすると、

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \int d\mathbf{k}'d\omega'd\mathbf{k}d\omega \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}', \omega')\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{|\mathbf{k}'|^2\hat{\epsilon}(\mathbf{k}', \omega')}(-i\omega)(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}) e^{i(\omega'+\omega)t} \\ &= (2\pi)^3 \int d\mathbf{k}d\omega d\omega' \frac{\hat{\rho}(-\mathbf{k}, \omega')\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{|\mathbf{k}|^2\hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega')}(-i\omega) e^{i(\omega'+\omega)t}\end{aligned}$$

となる。ここで (a) の結果である $\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$ の表式を代入して ω で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\omega d\omega' \frac{\delta(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega') \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega)}{|\mathbf{k}|^2 \hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega')} (-i\omega) e^{i(\omega+\omega')t} \\ &= \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\omega' \frac{\delta(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega')}{|\mathbf{k}|^2 \hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega')} (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega')t} \end{aligned}$$

ここで、被積分関数の $\delta(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega')$ より、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega'$ であるので指数関数の部分は 1 になる。したがって、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} d\omega' \frac{\delta(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \omega')}{|\mathbf{k}|^2 \hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega')} (i\omega')$$

を得る。

15 最終レポート

15.1 最終レポート問題 [37]

下図のように q 枚の誘電体層を x - y 面と平行に重ねた光学素子がある。 i 番目の層の屈折率を n_i 、厚さを $L_i (= z_{i+1} - z_i)$ とする。 z 方向に進む振動数 ω の直線偏光電磁波が、屈折率 n_0 の領域からこの素子に垂直に入射し、屈折率 n の領域へ透過する場合について考える。 i 番目の層内の位置 $z (z_i \leq z \leq z_{i+1})$ における電場を $\mathbf{E}_i(z, t) = E_i(z) \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{x}}$, 磁場を $\mathbf{H}_i(z, t) = H_i(z) \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{y}}$ と書く。ここで $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルであり、屈折率はすべて実数である。

屈折率 n_0 の領域を 0 番目、屈折率 n の領域を $q+1$ 番目の層として、 i 番目の層の誘電率を ϵ_i , 透磁率を $\mu_i (0 \leq i \leq q+1)$ としよう。以下、 c は真空中の光速である。 $(\epsilon_i \mu_i = (n_i/c)^2$ となる)

(a) i 番目の層に着目する。関係式

$$\begin{pmatrix} E_i(z_i) \\ H_i(z_i) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} E_i(z_{i+1}) \\ H_i(z_{i+1}) \end{pmatrix}$$

で定義される特性行列 \mathbf{M}_i の各成分を求めよ。(5)

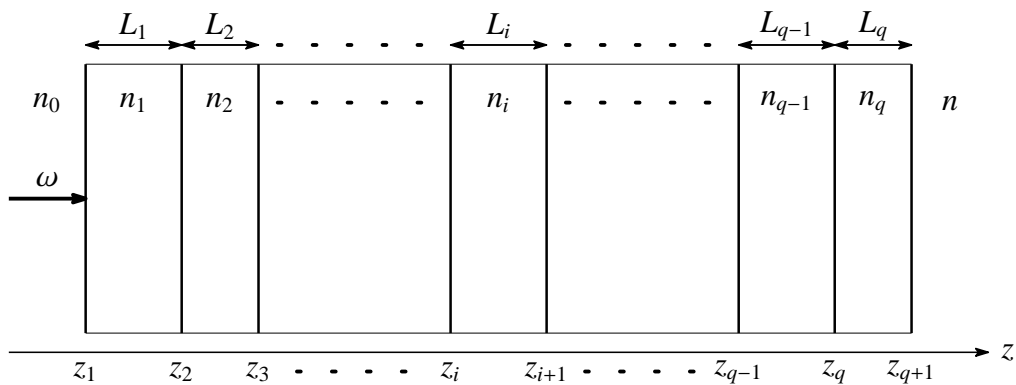


図 13: 誘電体層を積み重ねた光学素子の図

(a) 入射角ゼロで誘電体に電場と磁場が入射する。このため、透過波と入射波の電場ベクトルは常に x 成分のみ、磁場ベクトルは常に y 成分のみである。

この場合の j 番目の誘電体層内での Faraday 則 $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$ と Ampère-Maxwell 則 $\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}$ は

$$\frac{dE_j(z)}{dz} = i\mu_j \omega H_j(z), \quad \frac{dH_j(z)}{dz} = i\epsilon_j \omega E_j(z)$$

となる。この方程式の解は、 α_j, β_j を定数として

$$E_j(z) = \alpha_j e^{ik_j z} + \beta_j e^{-ik_j z}, \quad H_j(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} [\alpha_j e^{ik_j z} - \beta_j e^{-ik_j z}]$$

となる。ここで波数は $k_j = \omega/c_j = n_j \omega/c = \omega \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ である。これは z 方向右向きに進む解 (透過波) と左向きに進む解 (反射波) の重ね合わせになっている。定数 α_j, β_j は境界条件から決定される。誘電体境界での境界条件は、(i) \mathbf{E}, \mathbf{H} の境界面接線成分は連続、(ii) \mathbf{D}, \mathbf{B} の境界面法線成分が連続であった。今の場合 (i) を考慮すれば良い。

本問の大きな流れは次のようになっている。誘電体層外の左領域 $z < z_1$ で入射波と反射波の振

幅 (α_0, β_0) を与え、誘電体層外の右領域 $z > z_{q+1}$ の透過波の振幅 (α_{q+1}) を与える。この (α_0, β_0) の情報が $z = z_1, z_2, \dots$ の誘電体境界面を境界条件を通して伝播して、各 j 層の振幅 (α_j, β_j) が決定される。

さて、 j 層の解 $E_j(z), H_j(z)$ をつかうと、境界 $z = z_j, z_{j+1}$ での電場と磁場は、

$$\begin{aligned} E_j(z_j) &= \alpha_j e^{ik_j z_j} + \beta_j e^{-ik_j z_j}, \\ H_j(z_j) &= \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} [\alpha_j e^{ik_j z_j} - \beta_j e^{-ik_j z_j}], \\ E_j(z_{j+1}) &= \alpha_j e^{ik_j(z_j+L_j)} + \beta_j e^{-ik_j(z_j+L_j)}, \\ H_j(z_{j+1}) &= \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} [\alpha_j e^{ik_j(z_j+L_j)} - \beta_j e^{-ik_j(z_j+L_j)}] \end{aligned}$$

である。これを行列でかくと

$$\begin{pmatrix} E_j(z_j) \\ H_j(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p^{-1} \\ bp & -bp^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_j(z_{j+1}) \\ H_j(z_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & (pa)^{-1} \\ bpa & -b(pa)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

となる ($p = e^{ik_j z_j}$, $a = e^{ik_j L_j}$, $b = \sqrt{\epsilon_j/\mu_j}$)。以上から、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p^{-1} \\ bp & -bp^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_j(z_j) \\ H_j(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & (pa)^{-1} \\ bpa & -b(pa)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_j(z_{j+1}) \\ H_j(z_{j+1}) \end{pmatrix}$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} E_j(z_j) \\ H_j(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p^{-1} \\ bp & -bp^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pa & (pa)^{-1} \\ bpa & -b(pa)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_j(z_{j+1}) \\ H_j(z_{j+1}) \end{pmatrix}$$

である。したがって、 j 層目の特性行列は

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos k_j L_j & -i \sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_j}} \sin k_j L_j \\ -i \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} \sin k_j L_j & \cos k_j L_j \end{pmatrix}$$

となる ($k_j = \omega/c_j = n_j \omega/c$)。

(b) 以下では、各層の厚さを $L_i = \pi c/2n_i \omega$ ($i = 1, 2, \dots, q$) と選んだ場合を考える。ただし、 c は真空中の光速度である。関係式

$$\begin{pmatrix} E_1(z_1) \\ H_1(z_1) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_q(z_{q+1}) \\ H_q(z_{q+1}) \end{pmatrix}$$

で定義されるこの素子の特性行列 \mathbf{M} の各成分を $\{n_i\}_{i=1}^q, \{\mu_i\}_{i=1}^q$ を用いて求めよ。(5)
(ヒント: q の偶奇で場合分けせよ)

$L_j = \pi c/(2n_j \omega)$ と選ぶと、

$$M_j = \begin{pmatrix} 0 & -i \sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_j}} \\ -i \sqrt{\frac{\epsilon_j}{\mu_j}} & 0 \end{pmatrix} = -i \frac{c}{n_j} \begin{pmatrix} 0 & \mu_j \\ \epsilon_j & 0 \end{pmatrix}$$

である。誘電体境界面での境界条件より、

$$\begin{pmatrix} E_j(z_{j+1}) \\ H_j(z_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{j+1}(z_{j+1}) \\ H_{j+1}(z_{j+1}) \end{pmatrix}$$

が成り立つ (\mathbf{E}, \mathbf{H} の境界面接線成分は連続)。したがって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1(z_1) \\ H_1(z_1) \end{pmatrix} &= M_1 \begin{pmatrix} E_1(z_2) \\ H_1(z_2) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} E_2(z_2) \\ H_2(z_2) \end{pmatrix} = M_1 M_2 \begin{pmatrix} E_2(z_3) \\ H_2(z_3) \end{pmatrix} = \dots \\ &= M_1 M_2 M_3 \cdots M_{q-1} M_q \begin{pmatrix} E_q(z_{q+1}) \\ H_q(z_{q+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。つまり、 $M = M_1 M_2 M_3 \cdots M_q$ である。この M を M_j をつかって計算すると、

$$M = \begin{cases} (-1)^{q/2} \frac{c^q}{n_1 n_2 n_3 \cdots n_q} \begin{pmatrix} \mu_1 \epsilon_2 \mu_3 \epsilon_4 \cdots \mu_{q-1} \epsilon_q & 0 \\ 0 & \epsilon_1 \mu_2 \epsilon_3 \mu_4 \cdots \epsilon_{q-1} \mu_q \end{pmatrix} & (q: \text{偶数}) \\ i(-1)^{(q-1)/2} \frac{c^q}{n_1 n_2 n_3 \cdots n_q} \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \epsilon_2 \mu_3 \epsilon_4 \cdots \epsilon_{q-1} \mu_q \\ \epsilon_1 \mu_2 \epsilon_3 \mu_4 \cdots \mu_{q-1} \epsilon_q & 0 \end{pmatrix} & (q: \text{奇数}) \end{cases}$$

となる。また、 $\epsilon_j = n_j^2 / (c^2 \mu_j)$ を使うと、

$$\begin{aligned} M &= \begin{cases} (-1)^{q/2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} & (q: \text{偶数}) \\ i(-1)^{(q-1)/2} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{m} \\ \tilde{m}^{-1} & 0 \end{pmatrix} & (q: \text{奇数}) \end{cases} \\ m &= \frac{n_2 n_4 n_6 \cdots n_{q-2} n_q}{n_1 n_3 n_5 \cdots n_{q-3} n_{q-1}} \frac{\mu_1 \mu_3 \mu_5 \cdots \mu_{q-3} \mu_{q-1}}{\mu_2 \mu_4 \mu_6 \cdots \mu_{q-2} \mu_q} \\ \tilde{m} &= c \frac{n_2 n_4 n_6 \cdots n_{q-2} n_q}{n_1 n_3 n_5 \cdots n_{q-3} n_{q-1}} \frac{\mu_1 \mu_3 \mu_5 \cdots \mu_{q-2} \mu_q}{\mu_2 \mu_4 \mu_6 \cdots \mu_{q-3} \mu_{q-1}} \end{aligned}$$

とかける。

(c) この素子の反射率と透過率を求め、反射率をなるべく 1 に近づける方法を一つ述べよ。(5)

領域 $z < z_1$ のインデックスを 0、領域 $z > z_{q+1}$ のインデックスを $q+1$ とおいていた。本問では領域 0 と領域 $q+1$ で電磁場を次のように与えることになる。まず、領域 0 では、

$$\begin{aligned} E_0(z) &= \alpha_0 e^{ik_0 z} + R \alpha_0 e^{-ik_0 z}, \\ H_0(z) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\alpha_0 e^{ik_0 z} - R \alpha_0 e^{-ik_0 z}] \end{aligned}$$

とする。右向き進行の電磁場 (入射波) に対して、左向き進行の電磁場 (反射波) の振幅が R 倍されているとおいている。次に、領域 $q+1$ では、

$$\begin{aligned} E_{q+1}(z) &= T \alpha_0 e^{ik_{q+1} z}, \\ H_{q+1}(z) &= \sqrt{\frac{\epsilon_{q+1}}{\mu_{q+1}}} T \alpha_0 e^{ik_{q+1} z} \end{aligned}$$

とする。つまり、この領域 $q+1$ では右向きの電磁場 (透過波) しか存在しないとされた。その透過波の振幅が入射波の T 倍であるとおいた。ここで求めたい反射率と透過率は、入射波、反射波、透過波の Poynting ベクトル ($\mathbf{E} \times \mathbf{H}$) の大きさの比から定義される。従って、 $|R|^2$, $|T|^2$ がそれぞれ反射率と透過率を与えることになる。

さて、誘電体境界 $z = z_1$ と $z = z_{q+1}$ における境界条件と前設問の結果をつかうと、領域 0 と領域 $q+1$ の関係は次のようになることがわかる

$$\begin{pmatrix} E_0(z_1) \\ H_0(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(z_1) \\ H_1(z_1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_q(z_{q+1}) \\ H_q(z_{q+1}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{q+1}(z_{q+1}) \\ H_{q+1}(z_{q+1}) \end{pmatrix}.$$

つまり、

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 e^{ik_0 z_1} + R\alpha_0 e^{-ik_0 z_1} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\alpha_0 e^{ik_0 z_1} - R\alpha_0 e^{-ik_0 z_1}] \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} T\alpha_0 e^{ik_{q+1} z_{q+1}} \\ \sqrt{\frac{\epsilon_{q+1}}{\mu_{q+1}}} T\alpha_0 e^{ik_{q+1} z_{q+1}} \end{pmatrix}$$

を解けば R, T を求めることができる。反射率 $|R|^2$ 、透過率 $|T|^2$ は前設問 (b) の m, \tilde{m} をもちいて次のようになる

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \left| \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_{q+1}}{\mu_0 \epsilon_{q+1}}} m^2 + 1} \right) e^{2ik_0 z_1} \right|^2 = \left| 1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_{q+1}}{\mu_0 \epsilon_{q+1}}} m^2 + 1} \right|^2 \quad (q: \text{偶数}), \\ |T|^2 &= \left| \left(\frac{2m}{(-1)^{q/2} (m^2 + \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_{q+1}}{\epsilon_0 \mu_{q+1}}})} \right) e^{i(k_0 z_0 - k_{q+1} z_{q+1})} \right|^2 = \left| \frac{2m}{m^2 + \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_{q+1}}{\epsilon_0 \mu_{q+1}}}} \right|^2 \quad (q: \text{偶数}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \left| \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_{q+1}}{\mu_0 \mu_{q+1}}} \tilde{m}^2 + 1} \right) e^{2ik_0 z_1} \right|^2 = \left| 1 - \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_{q+1}}{\mu_0 \mu_{q+1}}} \tilde{m}^2 + 1} \right|^2 \quad (q: \text{奇数}), \\ |T|^2 &= \left| \left(\frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \tilde{m}}{i(-1)^{(q-1)/2} (\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_{q+1}}{\mu_0 \mu_{q+1}}} \tilde{m}^2 + 1)} \right) e^{i(k_0 z_0 - k_{q+1} z_{q+1})} \right|^2 = \left| \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \tilde{m}}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_{q+1}}{\mu_0 \mu_{q+1}}} \tilde{m}^2 + 1} \right|^2 \quad (q: \text{奇数}). \end{aligned}$$

反射率 $|R|^2$ を 1 に近付けるには、 $m^2, \tilde{m}^2 \ll 1$ となるか $m^2, \tilde{m}^2 \gg 1$ となるような実装を考えればよい。光学的な電磁波の周波数領域では、透磁率 μ_j はほとんど変化しないと仮定して良い。このとき m, \tilde{m} は屈折率の比だけできまる。そこで偶数番目の誘電体層を屈折率 n_e の同一の誘電体からつくり、奇数番目の誘電体層を屈折率 n_o の同一の誘電体からつくと、 $m^2, \tilde{m}^2 \sim (n_e/n_o)^q$ となる。ここで $n_e < n_o$ となるように選び、誘電体をたくさん重ねる ($q \rightarrow \infty$) と、 $m^2, \tilde{m}^2 \ll 1$ となり、反射率 $|R|^2$ を 1 に近付けることができる。逆に $n_e < n_o$ としても $m^2, \tilde{m}^2 \gg 1$ となるので、同じ効果がある。

15.2 最終レポート問題 [38]

問題 [26] で、半径 a の円柱状導体を内径 b の中空円柱状導体で囲い、間に非散逸性誘電体 (誘電率 ϵ , 透磁率 μ) を満たした同軸ケーブルが z 軸に沿って伸びているとき、ケーブル内を z 方向へ伝播する角振動数 ω の TEM 波 (導体間の誘電体中で $E_z = 0, B_z = 0$ の電磁波) を考えた。いま、2つの導体は良導体であるが、電気伝導度 σ_c が有限 ($\gg \omega\epsilon_c$) だとしよう。導体の透磁率を μ_c とする。このとき、電磁波が導体内にわずかに侵入してジュール熱が発生する。(a) 表皮の厚さ δ (磁場の振幅が $1/e$ になる深さ) が導体の厚さおよび電磁波の波長に比べて十分に小さいとする近似のもとで、 $\delta \approx \sqrt{2/(\omega\mu_c\sigma_c)}$ となることを示せ。(6)

問題 [26] を簡単に復習する。座標 z についての変動と、時間変動を $e^{i(kz-\omega t)}$ と仮定したときの同軸ケーブル内誘電体中での円柱座標系 Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + ikD_z &= \rho, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + ikB_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - ikE_\theta - i\omega B_r &= 0, \quad ikE_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} - i\omega B_\theta = 0, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - i\omega B_z = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - ikH_\theta &= j_r - i\omega D_r, \quad ikH_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j_\theta - i\omega D_\theta, \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{H_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = j_z - i\omega D_z \end{aligned}$$

である。ここで電荷密度、電流密度はないとしてよく、TEM 波 (transverse electromagnetic wave) なので、 $E_z = 0, B_z = 0$ である。また系の対称性から $\partial/\partial\theta = 0$ とする。上の第一式 (Gauss 則) と第二式 (磁荷非存在の式) から、ただちに $D_r(r) = C_1/r, B_r(r) = C_2/r$ となることがわかる (C_1, C_2 は境界条件からきまる定数)。これから、 $H_\theta(r) = C_1\omega/(kr), E_\theta(r) = -C_2\omega/(kr)$ である。半径 $r = a$ の円周で $H_\theta(r), E_\theta(r)$ を線積分すると

$$H_\theta(a)2\pi a = I_0, \quad E_\theta(a)2\pi a = -i\omega \int_0^a \int_0^{2\pi} B_z(r)rdrd\theta = 0$$

となるので、 $C_1 = I_0k/(2\pi\omega), C_2 = 0$ となる (I_0 は内部円柱導体 z 方向に流れる電流の振幅)。つまり、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I_0k}{2\pi\omega\epsilon r}, \quad E_\theta = 0, \quad E_z = 0, \\ H_r &= 0, \quad H_\theta = \frac{I_0}{2\pi r}, \quad H_z = 0 \end{aligned}$$

である ($k^2 = \omega\epsilon\mu$ でもある)。

さて、本問題では導体が完全導体でないので $\mathbf{j} = \sigma_c\mathbf{E}$ となっている。この場合、導体中での Faraday 則と Ampere-Maxwell 則は、

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \sigma_c\mathbf{E} - i\omega\mathbf{D} = (\sigma_c - i\omega\epsilon_c)\mathbf{E}$$

である。これから、 \mathbf{E} を消去して $\mathbf{B} = \mu_c\mathbf{H}$ の式を導出すると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - i\omega\mu_c(\sigma_c - i\omega\epsilon_c)\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

を得る。さらに $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ に注意すると、

$$\nabla^2\mathbf{B} + i\omega\mu_c(\sigma_c - i\omega\epsilon_c)\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

である。ここで、左辺の変位電流による寄与が Ohm 則による寄与よりも小さいとみなすと

$$\nabla^2 \mathbf{B} + i\omega\mu_c\sigma_c \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

となる。

この式の解を以下では近似的に扱うことにする。まず、この式を 1 次元的にみなして、座標 s を導体表面からの距離とすると

$$\frac{d^2 B(s)}{ds^2} = -i\omega\mu_c\sigma_c B(s)$$

となり、解は

$$B(s) = C_{\pm} e^{\pm \sqrt{-i\omega\mu_c\sigma_c} s}$$

となる。ここで $\sqrt{-i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ に注意して磁場が導体内で減衰する解を選ぶと

$$B(s) = B_0 \exp \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\omega\mu_c\sigma_c} s \right] \propto \exp \left(-\frac{s}{\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_c\sigma_c}}} \right),$$

つまり、表皮厚さ $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_c\sigma_c}}$ である。

(b) (a) での近似のもとで、ケーブルの単位長さ、単位時間あたりのエネルギー損失率が

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dz} \simeq \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{2\sigma_c}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) |I_0|^2 \quad (1)$$

で与えられることを示せ。(6)

以上から、本問の設定では、導体内の磁場は次のように与えられる

$$H_{\theta}(r) = \begin{cases} H_{\theta}(a) \exp \left[-\frac{a-r}{\delta} (1-i) \right] & (r \leq a), \\ H_{\theta}(b) \exp \left[-\frac{r-b}{\delta} (1-i) \right] & (r \geq b). \end{cases}$$

ここで、境界値として $H_{\theta}(a) = I_0/(2\pi a)$, $H_{\theta}(b) = I_0/(2\pi b)$ となる。このとき、 $r < a$ での電場は

$$\begin{aligned} E_r &= j_r/\sigma_c \simeq -ikH_{\theta} = -ikH_{\theta}(a)e^{-\frac{a-r}{\delta}(1-i)}, \\ E_{\theta} &= j_{\theta}/\sigma_c \simeq 0, \\ E_z &= E_z/\sigma_c \simeq \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} + \frac{H_{\theta}}{r} = H_{\theta}(a)e^{-\frac{a-r}{\delta}(1-i)} \left(\frac{1-i}{\delta} + \frac{1}{r} \right) \sim \frac{H_{\theta}(a)}{\delta} (1-i)e^{-\frac{a-r}{\delta}(1-i)} \end{aligned}$$

で与えられる ($r > b$ でも同様)。ここで $\delta \ll r$ として E_z の $1/r$ の項は無視した。

本問で求めたいエネルギー損失率は、ジュール熱を考慮すればよい。つまり、

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dz} = \frac{1}{2} \left[\int_0^a + \int_b^{\infty} \right] \int_0^{2\pi} \sigma_c |\mathbf{E}|^2 r dr d\theta$$

である (1/2 の因子は時間平均からきている)。ここで、 $|E_z| \propto 1/\delta \gg |E_r|$ であるので、 E_r からの寄与は無視できる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{loss}}}{dz} &\simeq \frac{1}{2} \sigma_c 2\pi \frac{2H_{\theta}^2(a)}{\delta^2} \int_0^a e^{-\frac{2(a-r)}{\delta}} r dr + \frac{1}{2} \sigma_c 2\pi \frac{2H_{\theta}^2(b)}{\delta^2} \int_b^{\infty} e^{-\frac{2(r-b)}{\delta}} r dr \\ &= 2\sigma_c \pi \frac{H_{\theta}^2(a)}{\delta^2 \sigma_c^2} \left[\frac{\delta}{2} a - \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 (1 - e^{-\frac{2a}{\delta}}) \right] + 2\pi \frac{H_{\theta}^2(b)}{\delta^2 \sigma_c} \frac{\delta}{2} \left(b - \frac{\delta}{2} \right) \\ &\simeq \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma_c}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) I_0^2 \end{aligned}$$

となる。ここでは δ について δ^{-1} 項だけをとった。

(補足: 本問題でも、導体内での円柱座標系での Maxwell 方程式を解析的に解くことができる。ただし、導体内では z 方向の電流密度を考慮するので $E_z \neq 0$ とする必要がある (20 ページの一番下の式は解析的に解ける)。このとき、解は Bessel 関数 J_0, J_1 を使って表されるが、引数は複素数になる。この場合には Bessel 関数がさらに特殊化して Kelvin 関数と呼ばれるものに帰着される (Kelvin 関数とは $\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - if = 0$ の解である)。この Kelvin 関数の漸近形を考慮すると、表皮厚さが自然に導入されることがわかる。)

(c) $r \equiv b/a (> 0)$ とする。問題 [26](b) で求めた特性インピーダンス Z_c の表式

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad (2)$$

と、上記(b)の結果より、外側の導体の内径 b が一定のケーブルに一定の電力 P を入力するときのエネルギー損失率が、 $L(r) = (r+1)/\ln r$ に比例することを示せ。なお、 $L(r)$ は $r = r_0 = 3.5911\dots$ において最小値 r_0 をとることがわかる。(3)

$$V_0 = I_0 Z_c = (2\pi)^{-1} I_0 \sqrt{\mu/\epsilon} \ln r \text{ より、}$$

$$P = \pi \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} V_0^2 / \ln r = (4\pi)^{-1} I_0^2 \sqrt{\mu/\epsilon} \ln r$$

なので、

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dz} \Big/ P = b^{-1} \sqrt{\frac{\omega\epsilon(\mu_c/\mu)}{2\sigma_c}} L(r).$$

を得る。

$$\frac{dL(r)}{dr} = \frac{\ln r - \frac{r+1}{r}}{(\ln r)^2}$$

より、 $L(r)$ は $\ln r = \frac{r+1}{r}$ (この解を r_0 とした) のときに極小値 $L(r = r_0) = (r_0 + 1)/\ln r_0 = r_0$ をとる。