

問題 [36]

電荷 q の荷電粒子が誘電体中を速度 $\mathbf{v}$ で等速運動をしている。誘電率 $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換を $\hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ とする ($\mathbf{k}$ は波数ベクトルで ω は振動数)。この場合に単位時間あたりに電場が失うエネルギーについて考察する。

(a) 誘電体中の電荷密度は $\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ である。電荷密度のフーリエ変換 $\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \frac{1}{2\pi} \int dt \rho(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\omega t} \quad (1)$$

を計算し、

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q}{(2\pi)^3} \delta(\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (2)$$

となることを示せ。電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換 $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega)$ も求めよ。

(b) 誘電体中の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ がスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ だけで決定される ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) と近似する。このときスカラーポテンシャルのフーリエ変換が

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega)}{|\mathbf{k}|^2 \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)} \quad (3)$$

となることを示せ。

(c) 電荷が電場からされる仕事率は

$$dW/dt = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x} \quad (4)$$

で与えられる。上の (a), (b) の結果を用いて、荷電粒子がされる仕事率が

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{i\omega}{|\mathbf{k}|^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}(-\mathbf{k}, \omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (5)$$

となることを示せ。この符号を反転させると、電場が単位時間あたりに失うエネルギーになる。つまり、このエネルギー損失を測定すれば物質の誘電率についての情報が得られることになる。

最終レポート

問題 [37], [38] に解答してください (各 15 点満点)。黒板での発表は 1 回 15 点を基本に 20–10 点で最大 45 点、3 回の小レポートは A 評価について 15 点として最大 45 点で採点しています。発表を 1 回以上行い、小レポートを 3 回とも期限内に提出している人は、最終レポートで少々減点があっても合格点に達するはずです。黒板での発表がうまくいかなかった人、問題 [37], [38] の解答に自信の持てない人は [39], [40] も解答してみてください。小レポートの期限後の提出・再提出も、最終レポートの締め切りまでは成績評価にあたり考慮します。

最終レポート問題 [37] (15)

下図のように q 枚の誘電体層を x - y 面と平行に重ねた光学素子がある。 i 番目の層の屈折率を n_i 、厚さを $L_i (= z_{i+1} - z_i)$ とする。 z 方向に進む振動数 ω の直線偏光電磁波が、屈折率 n_0 の領域からこの素子に垂直に入射し、屈折率 n の領域へ透過する場合について考える。 i 番目の層内の位置 z ($z_i \leq z \leq z_{i+1}$) における電場を $\mathbf{E}_i(z, t) = E_i(z) \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{x}}$, 磁場を $\mathbf{H}_i(z, t) = H_i(z) \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{y}}$ と書く。ここで $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルであり、屈折率はすべて実数である。

屈折率 n_0 の領域を 0 番目、屈折率 n の領域を $q+1$ 番目の層として、 i 番目の層の誘電率を ϵ_i 、透磁率を μ_i ($0 \leq i \leq q+1$) としよう。以下、 c は真空中の光速である。 $(\epsilon_i \mu_i = (n_i/c)^2)$ となる)

(a) i 番目の層に着目する。関係式

$$\begin{pmatrix} E_i(z_i) \\ H_i(z_i) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i \begin{pmatrix} E_i(z_{i+1}) \\ H_i(z_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

で定義される特性行列 $\mathbf{M}_i$ の各成分を求めよ。(5)

(b) 以下では、各層の厚さを $L_i = \pi c / 2n_i \omega$ ($i = 1, 2, \dots, q$) と選んだ場合を考える。関係式

$$\begin{pmatrix} E_1(z_1) \\ H_1(z_1) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_q(z_{q+1}) \\ H_q(z_{q+1}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

で定義されるこの素子の特性行列 $\mathbf{M}$ の各成分を $\{n_i\}_{i=1}^q, \{\mu_i\}_{i=1}^q$ を用いて求めよ。(5)

(ヒント: q の偶奇で場合分けせよ)

(c) この素子の反射率と透過率を求め、反射率をなるべく 1 に近づける方法を一つ述べよ。(5)

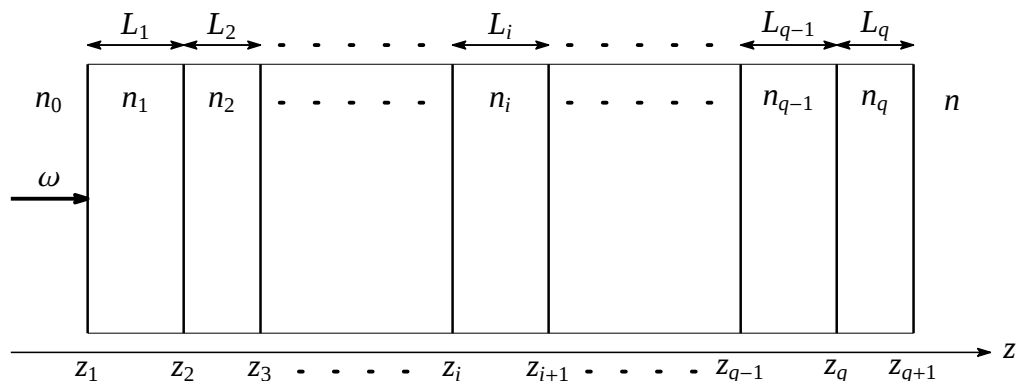


図 6: 誘電体層を積み重ねた光学素子の図

最終レポート問題 [38] (15)

問題 [26] で、半径 a の円柱状導体を内径 b の中空円柱状導体で囲い、間に非散逸性誘電体 (誘電率 ϵ , 透磁率 μ) を満たした同軸ケーブルが z 軸に沿って伸びているとき、ケーブル内を z 方向へ伝播する角振動数 ω の TEM 波 (導体間の誘電体中で $E_z = 0, B_z = 0$ の電磁波) を考えた。いま、2 つの導体は良導体であるが、電気伝導度 σ_c が有限 ($\gg \omega\epsilon_c$) だとしよう。導体の透磁率を μ_c とする。このとき、電磁波が導体内にわずかに侵入してジュール熱が発生する。

(a) 表皮の厚さ δ (磁場の振幅が $1/e$ になる深さ) が導体の厚さおよび電磁波の波長に比べて十分に小さいとする近似のもとで、 $\delta \approx \sqrt{2/(\omega\mu_c\sigma_c)}$ となることを示せ。(6)

(b) (a) での近似のもとで、ケーブルの単位長さあたりのエネルギー損失率 (単位時間あたりのエネルギー損失) が

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dz} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{2\sigma_c}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) |I_0|^2 \quad (1)$$

で与えられることを示せ。(6)

(c) $r \equiv b/a$ (> 0) とする。問題 [26](b) で求めた特性インピーダンス Z_c の表式

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln r \quad (2)$$

と、上記 (b) の結果より、外側の導体の内径 b が一定のケーブルに一定の電力 P を入力するときのエネルギー損失率が、 $L(r) = (r+1)/\ln r$ に比例することを示せ。また、 $L(r)$ は $r = r_0 = 3.5911\dots$ において最小値 r_0 をとることを説明せよ。(3)

最終レポート補充問題 [39](10)

この演習で扱った以外の、古典電磁気学の「パラドックス」として議論されたものの一つについて、いつ、誰により、どのような現象の何がパラドックスとされたのか、図を描き関係する物理量を複数の方法で計算するなどして具体的に説明せよ。

そして、現在ではその現象はどのように理解されているか(あるいは、まだ理解されていないか)を具体的に議論せよ。

最終レポート補充問題 [40](10+)

(A) または (B) を選択して解答してください。

(A) ある朝目が覚めたら西暦 1714 年の京都にいたとしよう。Maxwell 方程式が電気と磁気を記述し、光が電磁波でありその屈折や反射が物質の微視的な性質から説明できることや、電波を用いた通信が可能であることを、当時の人に納得させる教育プログラムを考え、そのための教科書の目次と概要(現代日本語による)を、A4 用紙 3-5 枚程度で作成せよ。

(B) [33], [34], [35], [36] のうち、所属クラスで発表がなかった問題を 1 問以上解き、簡潔に解答せよ。(選択できる問題を、1 月 31 日までに追加する可能性があり、その場合は KULASIS と演習ウェブページにより通知します。)

アンケート

回答は評価に無関係で、任意です。個人が識別できる情報は、演習の運営の目的でのみ使用します。

- (1) あなたは、この演習の初日を含む 13 回のうち、何回くらい出席しましたか。
- (2) 確認のため、前で発表した問題の番号を記入してください。
- (3) 演習問題 [1] - [38] のうち、特によいと思った問題があれば番号を書いてください。
- (4) 演習問題 [1] - [38] のうち、電磁気学の理解を深めるのに役に立たなかったと思う問題があれば番号を書いてください。
- (5) 次の a-n について、5-1 から選んで記入してください。(5: とてもあてはまる 4: ややあてはまる 3: どちらともいえない 2: あまりあてはまらない 1: 全くあてはまらない)
 - a. 予習と復習を積極的に行った。 b. 演習に対して意欲的に取り組んだ。
 - c. 問題の構成は適切であった。 d. 問題の順序は適切であった。 e. 問題の難しさは適切であった。
 - f. 配布物は読みやすかった。 g. 問題の訂正方法は適切であった。 h. 教員のクラス巡回の方法は適切であった。
 - i. クラス担当者の話し方(言葉・声の調子など)は適切であった。 j. クラス担当者の指導内容は適切であった。
 - k. クラス担当者は、受講者が質問や意見を述べられるよう十分に配慮していた。
 - l. この演習を全体的に見たときに、満足している。 m. 自分と関心の近い後輩にも是非すすめたい演習である。
 - n. この演習の受講により、電磁気学の理解が、事前に期待していた程度かそれ以上に深まった。
- (6) この演習について、意見・感想などを自由に書いてください。

担当教員からの回答を希望する場合は、□にチェックを入れ、提出用紙に E-mail アドレスを記入してください。レポートは学部教務掛窓口に、または電子メールで提出してください。

2013 年度 電磁気学 4 理論演習 (担当者: 手塚真樹) 期末レポート表紙

演習 ____ 組 学籍番号 ____ - ____ 氏名 _____

提出日 ____ 月 ____ 日

配布日: 2014 年 1 月 17 日 演習ウェブページ: <http://cond.scphys.kyoto-u.ac.jp/~tezuka/em4/>

提出期限: 理学 6 号館 学部教務掛窓口: 2014 年 2 月 6 日 (木)16:30, メール: 2 月 10 日 (月)10:00

返却予定: 2014 年 2 月 24 日 (月)–25 日 (火) 理学 5 号館 412 号室 12:10 – 12:30 (詳細はウェブで)

(1) ____ 回 (2) 問題 ____ (3) 問題 ____ (4) 問題 ____

(5) (a) ____ (b) ____ (c) ____ (d) ____ (e) ____ (f) ____ (g) ____

(h) ____ (i) ____ (j) ____ (k) ____ (l) ____ (m) ____ (n) ____

(6) この演習について、意見・感想などを自由にご書いてください。

(回答希望 ☐ E-mail _____)

紙で学部教務掛窓口のレポートボックスに提出する場合の提出方法:

- **A4 縦**のレポート用紙か白紙に答を書く (問題ごとに別の用紙を、問題番号を明記して使う)。
- 1 ページ目の上部に演習の組, 学籍番号, 氏名を、各ページの上部に氏名を明記する。
- その左上をホッチキス (ステープラー) で綴じる。
- この表紙に記入し、上で綴じたものとゼムクリップでとめる。
- 小レポートを再提出または遅れて提出する場合は、1 つの小レポートごとに綴じ、まとめてゼムクリップでとめる。
- メールアドレスは、アンケートの記入内容への回答が不要の場合は書かなくてよい。

担当教員に電子メール (tezuka@scphys.kyoto-u.ac.jp) で提出する場合、問題への解答は添付ファイル (PDF) とし、メールの本文にアンケートへの回答を書いてください。題名は「**電磁気学 4 理論演習レポート [クラス番号] 組 [氏名]**」としてください。16 時間以内に返信がなければ、平日昼間に、直接来室または 075-753-3798 に電話してください。居室は理学 5 号館 439 号室ですが、不在のときに来て、放置して帰ることのないようにしてください。

(ここまで 2014/ 1/17 配布)