

第 12 回 問題

宿題 [30] (球面電磁波の干渉)

下図 (A) のように、電磁波源 S_1, S_2 から、波数 k , 振動数 ω の球面電磁波が互いに同じ位相と電場振幅をもって放射されている。これらの電磁波を、板に開けられた 2 つの穴 P_1, P_2 (間隔 h) を通して、板から距離 D だけ離れたスクリーン上に投影する。ただし、 S_1, S_2, P_1, P_2 の y 座標はすべて 0 である。また、 $D \gg h$ を仮定し、電磁波源は十分遠くにあるとする。

(a) スクリーン上ではどのような干渉縞のパターンが観測されるか。

(b) h の値を適当に調節すると、干渉縞のコントラストが消失する。このときの h の値と、角度 θ とを結びつける関係式を求めよ。

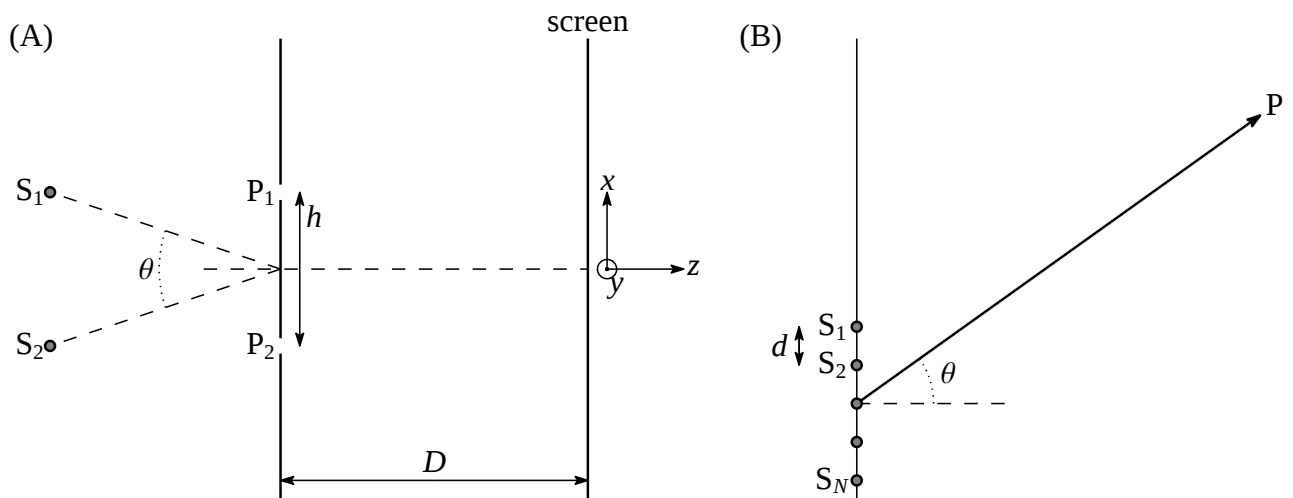


図 5: (A): 2 つの穴による電磁波の干渉。(B): 多数の波源からの電磁波の干渉。

宿題 [31] (フラウンホーファーの回折)

完全導体のシートに半径 a の円形の穴があいている。これによる単色電磁波の回折を考える (波数ベクトルの大きさを k とするとき $ka \ll 1$ となる範囲で考える)。シートに入射する直前で、電場がシートに垂直な方向で $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, 磁束密度がシートと平行な方向で $\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ であるとする。このときフラウンホーファー (Joseph von Fraunhofer (1787–1826)) 帯での回折電場が

$$\mathbf{E} = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{3\pi r} k^2 a^3 \left[2c \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{k}}{k} \times \left(\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right] \quad (1)$$

となることを示せ (ここで $\mathbf{k}$ は観測者の方向を向いた波数ベクトルである)。

宿題 [32]

上図 (B) のように、間隔 d で一直線上に並んだ N 個の光源 S_i ($i = 1, 2, \dots, N$) から、波数 k , 振動数 ω の球面電磁波が互いに同じ位相、電場振幅、偏光状態で放射されている。これらの光の重ね合わせを、 S_1-S_N 間の距離に比べてはるか遠方の点 P で観測した際の光の強度を求め、それが角度 θ (観測点の位置) とともにどのように変化するかを述べよ。

第 13 回 問題

宿題 [33]

座標反転 ($\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$ とすること)、および時間反転 ($t \Rightarrow -t$ とすること) によって電磁場の量がどのように変化するか (つまり、座標反転や時間反転によっても物理法則が変化しないためには物理量はどのように変化するべきか) を考察しよう。

(A) まず、力は座標反転をすると負の符号がつき (座標反転反対称)、時間反転をしても変化しない (時間反転対称)。次に、電荷はスカラー量なので、座標反転で変化しない (座標反転対称)。また時間反転でも変化しない (時間反転対称)。以上のことから、電場 $\mathbf{E}$ は、座標反転反対称であり、時間反転対称である。

(a) この電場の性質を使って、Faraday 則

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1)$$

から、磁束密度 $\mathbf{B}$ が座標反転対称、時間反転反対称であることを説明せよ。

(b) Ampère-Maxwell 則

$$(1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \quad (2)$$

で同様の議論をして、電流密度 $\mathbf{j}$ が座標反転反対称、時間反転反対称であることを説明せよ。

(B) こうした対称性は、未知の量を外場 (外からかけた電場や磁場) の量の展開として求める時のガイドになる。

(a) 外場 $\mathbf{E}$ があるときの誘電体中の分極ベクトル $\mathbf{P}$ は、よく $\mathbf{P}/\epsilon_0 = \chi \mathbf{E}$ とあらわされる (つまり $\mathbf{P}$ は $\mathbf{E}$ と同じ対称性をもつ)。この状態にさらに定常な磁場をかけたとして $\mathbf{B}$ についても展開をしたい。 $\mathbf{P}$ が $\mathbf{E}$ に比例していることから、 $\mathbf{E}$ の 1 次を含む $\mathbf{B}$ の 1 次の項と 2 次の項は、

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (\partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{B}, \quad (\partial_t^2 \mathbf{E}) \times \mathbf{B}, \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E}, \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}, \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})(\partial_t \mathbf{E})$$

などがある。対称性を議論して、 $\mathbf{P}$ の展開が上記の次数までの範囲で

$$\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} = \chi_0 \mathbf{E} + \chi_1 (\partial_t \mathbf{E}) \times \mathbf{B} + \chi_2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} + \chi_3 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \quad (3)$$

となることを説明せよ。

(b) 導体や半導体に電流 $\mathbf{j}$ が流れているとき、これに垂直に磁場 $\mathbf{H}$ をかけると電場が誘起される (Hall 効果)。この誘起電場 $\mathbf{E}$ を $\mathbf{j}$ と $\mathbf{H}$ の展開として表したい。(a) との類推で、 $\mathbf{E}$ を $\mathbf{j}$ の 1 次を含む形で $\mathbf{H}$ の 2 次までの展開を求め、各項の座標反転の対称性と時間反転の対称性を議論せよ。同じ対称性の項だけを残すと展開はどのようになるか。

座標反転反対称なベクトルを極性ベクトル (polar vector)、座標反転対称なベクトルを軸性ベクトル (axial vector) あるいは擬ベクトル (pseudovector) と呼ぶ。 $\mathbf{E}$ は極性ベクトルで、 $\mathbf{B}$ は軸性ベクトル (擬ベクトル) である。

補充問題

問題 [34]

実験室系で、静止している誘電体が、 $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$, $\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}'$ の関係を満たしている。実験室系に対して一様な速度 $\mathbf{v}$ で運動する系での $\mathbf{D}$ と $\mathbf{H}$ が、以下のように表されることを示せ。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \gamma^2 \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) (\beta^2 \mathbf{E}_\perp + \beta \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \gamma^2 \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) (-\beta^2 \mathbf{B}_\perp + \beta \times \mathbf{E}). \quad (2)$$

ここで、 $\beta = \mathbf{v}/c$, $\beta = |\beta|$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ であり、 $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{B}_\perp$ は $\mathbf{v}$ に垂直な成分を表す。
 $[(\mathbf{E}, \mathbf{B}), (\mathbf{D}, \mathbf{H})]$ がそれぞれ 4 次元電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ になることを用いる。]

問題 [35]

完全導体に囲まれた空洞 V の中に誘電率 ϵ 、透磁率 μ の物質が詰まっている。この共振器内の電場が

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k^2 \mathbf{E}, \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (1)$$

を満たしている。空洞 V の表面 ∂V では通常の境界条件が満たされている。

(a) 次の式

$$k^2 = \frac{\int_V \mathbf{E}^* \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})] d\mathbf{r}}{\int_V \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} d\mathbf{r}} \quad (2)$$

が固有値 k^2 に対する変分原理になっていることを確かめよ (電場が $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \delta \mathbf{E}$ と変化したときに固有値の変分が $\delta \mathbf{E}$ の 2 次以上で与えられることを示す)。ここで、 $\mathbf{E}$ 、 $\delta \mathbf{E}$ は境界条件をみたす。また、 $\mathbf{E}^*$ は複素共役を表す。

(b) 半径 R 、長さ d の円柱型共振器の TM_{010} モードを上記の変分原理を使って考察する。円柱座標系 (ρ, ϕ, z) を考え、試行電場として $E_z = E_0 \cos(\pi \rho / (2R))$ を代入することで、固有値として

$$kR = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2 - 4}} \quad (3)$$

が得られることを示せ。この値を Bessel 関数 $J_0(x)$ の最初の零点 j_{01} の値と比較せよ。

(ここまで 2013/12/27 配布)