第 11 回 問題

宿題 [28] (キルヒホッフの積分公式)

小さな穴を通る電場の回折を次の手順で議論せよ。

(a) 3 次元空間中で定義された、充分な回数微分可能な関数 $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ を考える。$\hat{\mathbf{n}}$ を、空間中の領域 V の表面 ∂V の、V の内側から外側に向く単位法線ベクトルとする。ガウスの発散定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \tag{1}$$

を用いて、以下の式 (グリーンの公式) が成り立つことを確かめよ。

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial V} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S\,. \tag{2}$$

(b) スカラー場 $\varphi(\mathbf{x})$ がヘルムホルツ方程式 (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894))

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{3}$$

を満たすとする。このヘルムホルツ方程式のグリーン関数は

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{4}$$

で与えられる。式 (2) に φ, G を代入することで

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} [\varphi(\mathbf{x}')\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla'\varphi(\mathbf{x}')]\mathrm{d}S' \tag{5}$$

となることを示せ。ここで $\hat{\mathbf{n}}'$ は表面 ∂V の単位法線ベクトルで外側から内側を向く。また、∇' は $\mathbf{x}'$ での微分を表す。

(c) ここで、無限に広がる空間で外向きに伝播する解

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathrm{e}^{ikr}/(4\pi r) \tag{6}$$

をグリーン関数として選ぶ。ただし $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ とする。境界面 ∂V 上での積分を、境界面上にある穴 S 上のみの面積分に置き換えることで、回折場が

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}' \cdot \left[\nabla'\varphi + \mathrm{i}k\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}\varphi\right]\mathrm{d}S' \tag{7}$$

(キルヒホッフ (Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887)) の積分公式) となることを示せ。

宿題 [29] (完全導体にあいた穴による回折)

x–y 平面に完全導体のシートがあり、長方形の穴があいている。長方形は $-a/2 \le x \le a/2$, $-b/2 \le y \le b/2$ にあるものとする ($b \ge a$)。このシートに垂直に平面波電場が入射する。このとき偏光ベクトルは y 軸と β の角度をなすものとする。

(a) キルヒホッフの積分公式を用いて、回折した電場の遠方 ($R \equiv |\mathbf{x}| \gg a, b$) での振舞を計算せよ。

(b) 回折場の単位立体角あたりのパワーを計算せよ。

(ここまで 2013/12/20 配布)