

宿題 [26] (同軸ケーブル)

半径 a の円柱状導体を内径 $b (> a)$ の中空円筒状導体で囲った同軸ケーブル (Oliver Heaviside (1850–1925) による発明 (1880)) が、 z 軸に沿って伸びている。その中空部分には非散逸性誘電体 (誘電率 ϵ , 透磁率 μ) が一様に満たされている。位置 $z = 0$ で、二つの導体間に交流電圧 $V = V_0 \exp(-i\omega t)$ をかけたとき、ケーブル内を z 方向へ伝わる TEM 波 ($E_z = 0, B_z = 0$ の電磁波) について考える。二つの導体は完全導体であるとみなす。

(a) 問題 [22](A) の関係式を用いて、電場と磁場の分布を求めよ。

(b) 位置 $z = 0$ で、一方の導体を流れる電流を $I = I_0 \exp(-i\omega t)$ としたとき、このケーブルの特性インピーダンス $Z_c \equiv V/I = V_0/I_0$ を求めよ。 $\epsilon \approx \epsilon_0, \mu \approx \mu_0$ のとき、 Z_c はおよそどの程度の値となるか。

(c) 複素ポインティングベクトルおよび、単位時間あたりのエネルギーの流れの時間平均 P を求めよ。 $P = I^* \cdot V/2$ が成り立っていることを確かめよ。

問題 [27]: 小レポート 3 (提出期限: 2013 年 12 月 20 日 (金) 16:30)

(A) 一般に、屈折率 $n(\mathbf{r})$ が空間的にゆるやかに変化する媒質中での光線の軌跡は、アイコナル (eikonal) 近似のもとで

$$\frac{d}{ds} \left[n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(\mathbf{r}) \quad (1)$$

と記述される。ここに s は光線に沿って測った軌跡の長さである。いま、 z 軸に沿って伸びた光ファイバーがあり、その内部の屈折率 $n(x)$ は $|x|$ の減少関数である。原点 $(x, z) = (0, 0)$ から z 軸と角度 $\theta(0)$ をなす方向に進出した光線が x - z 面内を伝播するとき、軌跡に沿って x がとりうる最大値を $x_{\max}$ とする。光線の軌跡は

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}}{\bar{n}} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。ただし、 $\bar{n} \equiv n(x_{\max}) = n(0) \cos[\theta(0)]$ である。

(B) 屈折率 $n(x)$ が x とともにゆるやかに変動する媒質中を x - z 面内に沿って z 方向へ進む光線の $z = z_1$ から $z = z_2$ までの軌跡は、フェルマー (Pierre de Fermat (1607?-1665)) の原理によれば、変分条件

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} dz \mathcal{L}(x, x', z) = 0, \quad \mathcal{L}(x, x', z) = n(x) \sqrt{1 + x'^2}, \quad x' \equiv \frac{dx}{dz} \quad (3)$$

から決定される。これに対応するオイラー (Leonhard Euler (1707-1783)) 方程式を書き、光線の方程式が

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] \quad (4)$$

となることを示せ。また、式 (2) が、この関係式を満たしていることを示せ。

(C) 屈折率が $n(x) = n(0)/\cosh(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) で与えられるグレーデッド (graded) 型光ファイバー内を x - z 面内に沿って伝播する光線について考える。

(a) x から t への変数変換

$$\sinh(\alpha x) = \sinh(\alpha x_{\max}) \sin t \quad (5)$$

を用いて、光線の軌跡が、

$$\sin(\alpha z) = \sinh(\alpha x) / \sinh(\alpha x_{\max}) \quad (6)$$

と表されることを示し、 $\theta(0) = \pi/6, \pi/4$ の場合について、 x - z 面上に軌跡のグラフを描け。

(b) 光線の半周期 Z (光線が z 軸を一度横切ってから再び横切るまでに z 方向に進む距離) を求め、それが発信角 $\theta(0)$ によらないことを示せ。

(c) 半周期の光路長

$$L_{\text{opt}} \equiv 2 \int_{x=0}^{x=x_{\max}} ds n(x) \quad (7)$$

を計算し、発信角によらず $L_{\text{opt}} = n(0)Z$ となることを示せ。(一般の光ファイバーでは、 L_{opt} と $n(0)Z$ の比は 1 からわずかにずれ、そのずれは発信角に依存する。)

第 3 回小レポート 提出用紙

評価 A · B · F演習 __ 組 学籍番号 _____ ^{ふりがな}氏名 _____

提出日 ____ 月 ____ 日 採点者 _____

配布: 2013 年 12 月 13 日 (金)

提出期限: 2013 年 12 月 20 日 (金) 16:30

返却予定: 2013 年 12 月 27 日 (金) 演習時

再提出期限: 2014 年 1 月 10 日 (金) 16:30

(もし必要なら組・氏名を記入した A4 用紙を追加し、左上を綴じて提出してください。)

