

第 8 回 問題

宿題 [21] (非等方な誘電体)

非等方な誘電体中の平面電磁波の伝播を考えよう。簡単のため、誘電体は非透磁性 ($\mu = \mu_0$) かつ絶縁体とする。

角振動数 ω の電磁波について、分極ベクトル $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$ は、電場 $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ の関数として、線形の範囲で一般に (対称な) 電気感受率テンソル $\chi(\omega)_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\tilde{P}^i(\omega) = \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (1)$$

と書け、電束密度 $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$ は誘電率テンソル $\epsilon(\omega)_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) を用いて

$$\tilde{D}^i(\omega) = \epsilon_0 \tilde{E}^i + \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) = \sum_{j=1}^3 \epsilon(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (2)$$

と書ける。

以下、 $\epsilon(\omega)_{ij}$ の ω 依存性が無視できるとする。 ϵ_{ij} を対角化する座標軸 (主軸) をとり、対角成分を改めて ϵ_i ($i = 1, 2, 3$) とし、誘電体中での電束密度の各成分が

$$D_i = \epsilon_i E_i \quad (i = 1, 2, 3; i \text{ に関する和はとらない}) \quad (3)$$

と書けるとしよう (以後添え字は下付きで書く)。波数ベクトル $\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{k}}$ の平面電磁波を考える。

(a) 電場ベクトルを $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ とする。 $\tilde{\mathbf{E}}$ が

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (4)$$

を満たすことを示せ。(これより、 $\tilde{\mathbf{D}}$ が $\mathbf{k}$ と直交することがわかる。)

(b) $v_i \equiv (\mu_0 \epsilon_i)^{-1/2}$ と定義する。電磁波の位相速度 $v = \omega/k$ が方程式

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{k}_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0 \quad (5)$$

を満たすことを確かめよ。また、この方程式は v^2 に関する 2 次方程式であり、その 2 つの解に対応する電磁波が存在することがわかる。それらの電束密度ベクトルが直交することを示せ。

(c) 複屈折について、簡潔に説明せよ。