

## 2013 年度 京都大学理学部 電磁気学 4 演習

### 日程

毎回 金曜日 14:45 – 16:15; 2013/11/22, 2014/01/03 は休み

| 回  | 講義日        | (予定されている) 講義内容       | 演習日          | 配布問題                | 発表       | 出欠 |
|----|------------|----------------------|--------------|---------------------|----------|----|
| 1  | 2013/10/ 1 | 真空中の Maxwell 方程式 I   | 2013/10/11   | <b>0 1 2 3 4</b>    | 1 2      |    |
| 2  | 2013/10/ 8 | 真空中の Maxwell 方程式 II  | 2013/10/18   | 5 6 7               | 3 4 5    |    |
| 3  | 2013/10/22 | 物質中の Maxwell 方程式 I   | 2013/10/25   | 8 9 10              | 6 7 8    |    |
| 4  | 2013/10/29 | 物質中の Maxwell 方程式 II  | 2013/11/ 1   | 11 12 13            | 9 10     |    |
| 5  | 2013/11/ 5 | 物質中の Maxwell 方程式 III | 2013/11/ 8   | <b>14 15 16</b>     | 11 12 13 |    |
| 6  | 2013/11/12 | 物質中の電磁波 I            | 2013/11/15   | 17 18 19            | 15 16    |    |
| 7  | 2013/11/19 | 物質中の電磁波 II           | 2013/11/29   | 20 21 22            | 17 18    |    |
| 8  | 2013/11/26 | 物質中の電磁波 III          | 2013/12/ 6   | 23 24 25            | 19 20 21 |    |
| 9  | 2013/12/ 3 | 幾何光学                 | 2013/12/13   | 26 <b>27</b>        | 22 23 24 |    |
| 10 | 2013/12/10 | 交流回路                 | 2013/12/20   | 28 29 30            | 25 26 28 |    |
| 11 | 2013/12/17 | 光の散乱と回折 I            | 2013/12/27   | 31 32 33            | 29 30 31 |    |
| 12 | 2014/ 1/ 7 | 光の散乱と回折 II           | 2014/ 1/10   | 34 35 36            | 32 33 34 |    |
| 13 | 2014/ 1/14 | 光の散乱と回折 III          | 2014/ 1/17   | <b>37 38 39 40</b>  | 35 36    |    |
| 14 | 2014/ 1/21 | 予備                   | 2014/ 1/24   | 演習なし                |          |    |
| 15 | 2014/ 1/28 | 試験                   | 2014/ 2/ 6 頃 | レポート (問 37 – 40) 提出 |          |    |

### 方針

講義「電磁気学 4」で解説される内容を中心に演習を行います。発表者と他の受講者が積極的な質疑応答を行うことで、電磁気学に習熟します。(単位系は国際単位系 (SI) を用います。)

毎週配布する問題を 2 問ずつ解いて (宿題) 集まり、発表者が黒板で解くのに加えて、各回の開始時に問題を配布し (その場問題)、宿題 2 問解答後に希望者を募って黒板で解きます。発表時は初めに問題番号・氏名・学生番号の下 4 桁を見やすく書いてください。

宿題 1 問につき、発表者による説明 20–25 分、質疑応答およびクラス担当者からのコメント 5–10 分の 30 分で終わらせることを原則とします。その場問題は、宿題を解いていればより短い時間で解ける問題であり、最後の 30 分で解答・解説を終わらせることを原則とします。次週の宿題発表者は、まだ発表していない人を優先に、希望者からクラス担当者が指名しますが、指名された人が来ていない場合はその場で希望者に振り替えます。2 単位の演習ですので、教室に集まる 26 時間のほかに約 64 時間 (宿題 24 問 + その場問題 14 問 + 最終レポートで、発表準備を含め 1 問あたり約 1 時間半相当) の予習・復習ができることを履修の前提とします。

宿題の発表にプロジェクターが必要であれば、前の週にクラス担当者に申し出てください。発表者まかせにするのではなく、積極的に参加するとの意識を持ち、随時発言してください。

### 連絡先

担当教員: 手塚真樹 (物理学第一教室 凝縮系理論グループ。理学研究科 5 号館 439 号室)  
訪問する際は電子メール (tezuka at scphys.kyoto-u.ac.jp) で事前に連絡してください。

## 成績

以下を加算した数値をもとに、100－0 点の間でつける予定です。

- 発表 (20, 15, 10, 0) 単位の取得を希望する人は必ず発表すること。最大 45 点。
- 小レポート (A(15), B(5), F(0)) 第 1 回は [問題 0]。他の人と相談してもよいが、解答の作成は他の受講者の答案を見ずに自力で行うこと。演習時間外の提出は理学 6 号館 1 階教務窓口へ。1 週間後の演習終了後 (16:30) に提出締切。1-2 週間後に返却。F の場合は返却 2 週間後までの再提出を強く推奨する。B の場合も再提出可能。合計 45 点満点。
- 期末レポート (40－0) 期末に 1 回。

## クラス担当者 (TRA) と教室

第 1 回は、2 組, 4 組はともに 303 号室で行います。その場問題は 2 問 ([1], [2]) あります。第 3 回以降、担当者が交代するクラスがあります。

## 演習ウェブページ

<http://cond.scphys.kyoto-u.ac.jp/~tezuka/em4/>

## アンケート

回答は評価に無関係で、任意です。個人が識別できる情報は、本演習の運営の目的でのみ使用します。

1. 系登録は済んでいますか?  
(0:まだ 1:数理科学系 2:物理科学系 3:地球惑星科学系 4:化学系 5:生物科学系 9:理学部生以外)
2. 全学共通科目の (A)「物理学基礎論 B」 (B)「電磁気学続論」 (C)「特殊相対論」, 理学部科目の (a)「電磁気学 3」 (b)「電磁気学 3 演習」 (c)「電磁気学 4」を履修したか、または履修予定ですか?  
(1:履修した 2:今期履修する 3:次の学期に履修予定である 4:履修していないが内容は充分理解しており履修しない 5:履修せず内容も充分理解していないが履修する予定はない 9:不明)
3. この演習に求めることを自由に書いてください。
4. その他、言いたいことがあれば自由に書いてください。  
(思いつかなければ、クラス担当者 (TRA) と教員がよく知らないと思われることについて)

演習 組 学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

1. \_\_\_\_\_ 2. (A) 基B \_\_\_\_\_ (B) 電統 \_\_\_\_\_ (C) 特相 \_\_\_\_\_ (a) 電3 \_\_\_\_\_ (b) 電3演 \_\_\_\_\_ (c) 電4 \_\_\_\_\_

[解答: 裏面も使用可、不足なら A4 レポート用紙(1 枚ごとに組・番号・氏名を上記記入)を追加]



**[0] この問題を第 1 回小レポート課題 (締め切りは 2013/10/18) とします。**

(A) Biot-Savart の法則によれば、位置  $\mathbf{r}'$  にある微小な長さの電流要素  $d\mathbf{j} \equiv j d\mathbf{l}$  が位置  $\mathbf{r}$  に作る (微小な) 磁束密度は、 $\mathbf{d} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  として

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{d}}}{d^2} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $d \equiv |\mathbf{d}|$ ,  $\hat{\mathbf{d}} \equiv \mathbf{d}/d$  とした。

これを用いて、体積  $V$  に (時刻によらない) 電流密度  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  があるときの磁束密度の空間分布を求めよ。ここで、 $\mu_0$  は真空の透磁率であり、 $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$  を満たす。

(B) (A) の結果が、真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

のうち関係のあるものを満たしていることを確かめよ。

(C) (右手系の) 球座標  $(r, \theta, \phi)$  を考える。1 階微分可能なベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  は、

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r(\theta, \phi) + A_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) + A_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi(\theta, \phi)$$

と球座標表示される。 $\theta$  は頂角 (inclination; polar angle),  $\phi$  は偏角 (azimuth; azimuthal angle) で、

$$\mathbf{e}_r(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{y} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{z} \cos \theta,$$

$$\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{y} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{z} \sin \theta,$$

$$\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \equiv -\mathbf{x} \sin \phi + \mathbf{y} \cos \phi$$

である。この  $A_r, A_\theta, A_\phi$  を用いて、 $\nabla \times \mathbf{A}$  を表せ。また、スカラー場  $f(\mathbf{r})$  に対して、球座標により  $\nabla^2 f$  を表せ。



## 第 1 回 問題

### その場問題 [1] (微分形の Maxwell の法則と積分形の法則の関係)

真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

について、以下 (A), (B) の空欄を埋める式をそれぞれ与え、その物理的意味について考察せよ。ただし、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  は電場と磁束密度、 $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電荷密度と電流密度、 $c$  と  $\epsilon_0$  は光速と真空の誘電率、 $t$  は時刻をそれぞれ表す。また、(C) に答えよ。

(A) (充分滑らかな) 閉曲面  $A$  に囲まれた体積  $V$  を考える。以下、 $A$  上での (面) 積分について、 $A$  の接平面に垂直で外向きの単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  で表す。Gauss の定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_A \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5)$$

を用いると、(1), (3) より下記 2 式を得る。

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \boxed{\boxed{(a)}} \quad (6)$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (7)$$

(B) 平面上で、(充分滑らかな) 閉曲線  $C$  に囲まれた部分  $S$  を考える。平面の法線方向の単位ベクトル  $\mathbf{n}$  をとり、これが手前向きになる側から見て反時計回りに  $C$  に沿った線積分を行うものとする。Stokes の定理

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

を用いると、(2), (4) より下記 2 式を得る。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \boxed{\boxed{(b)}} \quad (9)$$

$$c^2 \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS = c^2 \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \cdot \mathbf{n} dS + \boxed{\boxed{(c)}} \quad (10)$$

(C) (右手系の) 球座標  $(r, \theta, \phi)$  を考える。1 階微分可能なベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  は、

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = A_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r(\theta, \phi) + A_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) + A_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \quad (11)$$

と球座標表示される。 $\theta$  は頂角 (inclination; polar angle),  $\phi$  は偏角 (azimuth; azimuthal angle) で、

$$\mathbf{e}_r(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{y} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{z} \cos \theta, \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_\theta(\theta, \phi) \equiv \mathbf{x} \cos \theta \cos \phi + \mathbf{y} \cos \theta \sin \phi - \mathbf{z} \sin \theta, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_\phi(\theta, \phi) \equiv -\mathbf{x} \sin \phi + \mathbf{y} \cos \phi \quad (14)$$

である。この  $A_r, A_\theta, A_\phi$  を用いて、 $\nabla \cdot \mathbf{A}$  を表示せよ。(ヒント:  $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ )

## その場問題 [2] (フーリエ変換)

(A) 次の積分公式を示せ。  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$ ,  $\int_0^{\infty} (\sin \omega t)/t dt = \pi/2$  ( $\omega > 0$ ) を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) \cos(2az) = \sqrt{\pi} \exp(-a^2), \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin^2 z}{z^2} = \pi. \quad (2)$$

(ヒント: (1) の左辺は  $\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-z^2) \exp(2iaz)$  の実部と等しい。(2) の左辺は部分積分により与えられた公式の形にできる)

(B) 関数  $f(x)$  で振幅変調された一次元平面波束  $u(x) = f(x) \exp(ik_0 x)$  を考える。フーリエ (Joseph Fourier (1768–1830)) 変換を

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \exp(-ikx) \quad (3)$$

とする。上で示した積分公式などを用いて、以下に与える関数形  $f(x)$  の場合に、波束の波数スペクトル  $|A(k)|^2$  を計算し、図示せよ。

(a)  $f(x) = N \exp(-\alpha|x|/2)$  ( $\alpha > 0$ )

(b)  $f(x) = N \exp(-\alpha^2 x^2/4)$  ( $\alpha > 0$ )

(c)  $f(x) = \begin{cases} N & (|x| \leq r) \\ 0 & (|x| > r) \end{cases}$  ( $r > 0$ )

ここで得られた結果は、パーセバル (Marc-Antoine Parseval (1755–1836)) の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |A(k)|^2 \quad (4)$$

を満たすことがわかる。(時間があれば確かめてみよう)

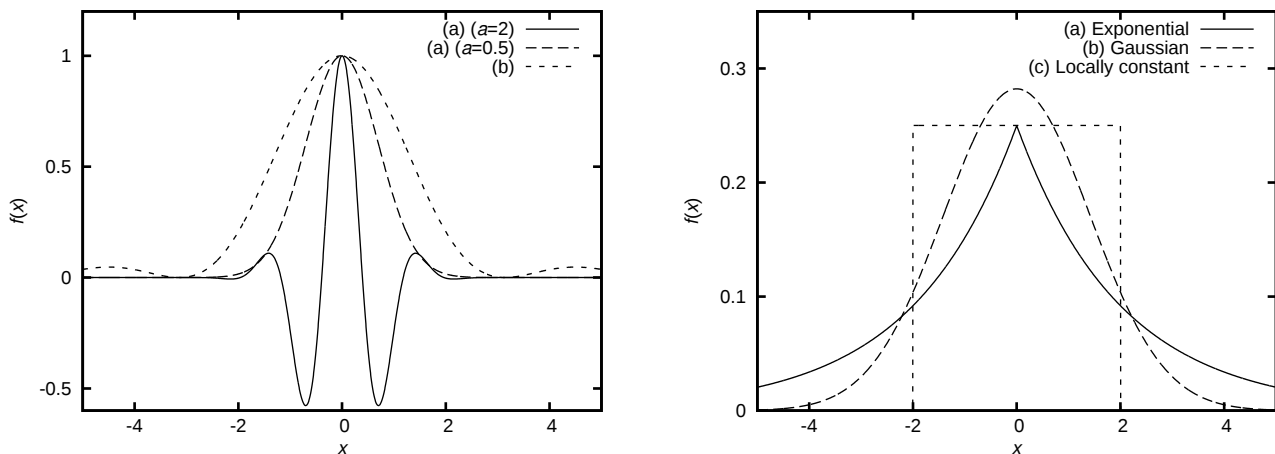


図 1: 左: (A) の被積分関数を、(1) については  $a = 2$  および  $a = 0.5$  の場合に図示した。右: (B) の  $f(x)$  を、 $\alpha = 1, r = 2$  として、(a)–(c) ごとに適当な  $N$  の値を選んで図示した。

## 第 2 回 問題

### 宿題 [3] (ポテンシャルとゲージ: クーロンゲージとローレンツゲージ)

真空中の Maxwell 方程式 (微分形)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

を考える。以下で、ベクトル場およびスカラー場は十分な回数だけ微分可能なものとする。

(A) あるベクトル場  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  とスカラー場  $\phi(\mathbf{r}, t)$  があって

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (5)$$

$$-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \quad (6)$$

を満たすとしよう。このとき、(2) と (3) が満たされることを確認し、(1) および (4) から、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  を含まない独立な 2 個の方程式が得られることを示せ。

(B) 任意のスカラー場  $\chi$  により、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$  としても (5) で得られる  $\mathbf{B}$  は変わらない (ゲージ不定性)。このとき、 $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$  とすれば (ゲージ変換)、 $\mathbf{E}$  も不変であることを確かめよ。

ゲージ変換により、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  とすることができる。このように選んだゲージをクーロンゲージという。この場合、(A) で得た方程式の片方が

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

と書けることを確かめ、もう一方の式を求めよ。

(C) ゲージを選んで

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

となるようにする (ローレンツゲージ) こともできること、また、このとき、 $\phi, \mathbf{A}$  が満たす微分方程式が

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi f(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

のような形になることを説明せよ。また、ローレンツゲージにはどのような不定性が残っているか説明せよ。

## 宿題 [4] (ラプラス変換とラプラス方程式)

(A)  $f(t)$  を  $0 \leq t < \infty$  で定義された関数とする。

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} dt f(t) \exp(-st) \quad (1)$$

( $s$  は複素数,  $\text{Re } s > 0$ ) が存在するとき、関数  $\tilde{f}(s)$  を  $f(t)$  のラプラス (Pierre-Simon Laplace (1749–1827)) 変換という。

$0 < \gamma < \omega$  として、常微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (2)$$

$$x(0) = 0, \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

の解を、ラプラス変換を用いて求めることを考える。

(a)  $\tilde{x}(s)$  を、 $\tilde{f}(s)$  を用いて表せ。

(b) 畳み込み積分

$$I(t) = \int_0^t d\tau g(t-\tau)h(\tau) \quad (4)$$

のラプラス変換は

$$\tilde{I}(s) = \tilde{g}(s)\tilde{h}(s) \quad (5)$$

で与えられることを示せ。

(c) (b) を用いて、解  $x(t)$  の表式を求めよ。

(B) 円柱座標系でのラプラス方程式  $\nabla^2 V(r, \varphi, z) = 0$  を、 $V(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$  のように変数分離して解き、 $Z(+\infty) = 0$  かつ  $R(0)$  が有限となるような解の一般形を求めよ。

(ここまで 2013/10/11 配布)

## その場問題 [5] (単振動する量の複素表示と複素ポインティングベクトル)

一般に、振動数  $\omega$  で時間変動する場は、電場については

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \quad (1)$$

のように表され、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は一般に複素ベクトルである。磁場  $\mathbf{H}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、電束密度  $\mathbf{D}$ 、電流密度  $\mathbf{J}$  など同様の形式に書ける。

(A) 通常のポインティング (John Henry Poynting (1852–1914)) ベクトルを

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

複素ポインティングベクトルを

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})/2 \quad (3)$$

とそれぞれ定義するとき、 $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$  の時間平均は

$$\overline{\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)} = \text{Re}[\mathbf{s}(\mathbf{r})] \quad (4)$$

で与えられることを示せ。

(B) 電場と磁場のエネルギー密度をそれぞれ

$$w_e(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r})/4, \quad (5)$$

$$w_m(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r})/4, \quad (6)$$

と定義するとき、Maxwell 方程式に基づいて、体積  $V$  の領域に対する複素ポインティングの定理

$$\frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{J}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2i\omega \int_V d\mathbf{r} [w_e(\mathbf{r}) - w_m(\mathbf{r})] + \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

を導け。ここで、左辺最終項は領域  $V$  の全表面 ( $S$ ) にわたる表面積分を意味する。

## 第 3 回 問題

### 宿題 [6] (伝導性媒質)

電気伝導率  $\sigma$ 、誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$  の一様な非分散性の伝導性媒質を考える。正味の電荷はないとする。

(A) Maxwell 方程式から出発し、媒質中の点  $\mathbf{r}$ 、時刻  $t$  における電場  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  が、方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

を満たすことを示せ。

(B) 電場が振動数  $\omega$  で時間変化するとき、変位電流の絶対値が伝導電流の絶対値に比べて小さくなるのは、 $\omega$  がどのような範囲のときか。この条件は、 $\sigma = 5.0 \, \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon/\epsilon_0 = 80$  の海水の場合にどうなるか。

(C) 場の時間変動が準静的で変位電流が無視できる場合、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  は

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

を満たす。時刻  $t (> 0)$  におけるこの方程式の解を、初期状態 ( $t = 0$ ) での値をもとにして、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', 0) \quad (3)$$

のように表す。グリーン (George Green (1793–1841)) 関数  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$  が、以下のフーリエ表示で与えられることを示せ。

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp\left(-\frac{k^2}{\mu\sigma} t\right) \quad (4)$$

## 宿題 [7] (グリーン関数の計算と利用)

(A) [6] (C) の積分を実行して、以下の式を導け。

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \frac{1}{8} \left( \frac{\mu\sigma}{\pi t} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\mu\sigma}{4t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \right] \quad (1)$$

(B)  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$  が以下の微分方程式を満足することを示せ。

$$\frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) \quad (2)$$

(C) 透磁率  $\mu$ 、電気伝導率  $\sigma$  の一様な非分散性の伝導性媒質で満たされた空間内の位置  $z = a$ ,  $-a$  に、無限に広い平板が  $x$ - $y$  面に平行に置かれている。これらの平板に互いに逆向きの定常電流を流すことによって、平板間の領域  $-a < z < a$  に、 $x$  方向の一様な磁場  $\mathbf{H} = H_0 \hat{\mathbf{x}}$  ができており ( $\hat{\mathbf{x}}$  は単位ベクトル)、その外側 ( $|z| > a$ ) では  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  である。

いま、時刻  $t = 0$  に電流を切ったとすると、その後の時刻  $t$ 、場所  $\mathbf{r}$  における磁場  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  は [6] と同様の拡散方程式

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

で記述され、その解は

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \mathbf{H}(\mathbf{r}', 0) \quad (4)$$

と表される。この式の右辺に [6](C) で与えたグリーン関数を代入することにより、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  を計算せよ。必要ならば、誤差関数

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi dx e^{-x^2} \quad (5)$$

を用いよ。特に、電流を切った直後および、充分時間が経過した後での振舞を議論せよ。

(ここまで 2013/10/18 配布)

## その場問題 [8] (コンデンサー)

半径  $a$  の薄い円盤状極板 2 枚が、真空中に中心軸 ( $z$  軸) を共通にして間隔  $d (\ll a)$  で平行に配置されたコンデンサーを考える。これらは  $z = d/2, -d/2$  の平面上にあるとしてよい。振動数  $\omega$  の交流電圧をかけると、2 枚の極板はそれぞれ電荷  $Q(t), -Q(t)$  をもち、 $Q(t)$  は時刻  $t$  とともに  $Q(t) = \text{Re} [Q_0 \exp(-i\omega t)]$  のように変動する。

このとき、極板間には交流電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ 、およびそれに伴う交流磁場 (磁束密度を  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$  と表す) が発生する。 $d \ll a$  であることと、 $z$  軸まわりの回転対称性から、 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}_z(r)\mathbf{e}_z = \tilde{E}_z(r)\mathbf{e}_z$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{B}}(r)$  としてよい。

(a) 極板間では電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  のどちらも存在しないことに注意して、Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

を円筒座標系  $(r, \phi, z)$  で解き、 $\tilde{E}_z(r)$  が満たすべき微分方程式を求めよ。

ただし、円筒座標系で、任意のベクトル  $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_z\mathbf{e}_z$  について

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \quad (6)$$

となることを使ってよい。

(b) (a) で得た式を、必要な境界条件のもとに解き、極板間の電場  $\text{Re} [\tilde{E}_z(r)e^{-i\omega t}]\mathbf{e}_z$  と磁束密度  $\text{Re} [\tilde{\mathbf{B}}(r)e^{-i\omega t}]$  を、第 1 種ベッセル (Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)) 関数を用いて表せ。

ただし、 $\nu$  次の第 1 種ベッセル関数  $J_\nu(x)$  は、微分方程式

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) f(x) = 0 \quad (7)$$

の  $x = 0$  で有界な解 (の規格化定数を適当に選んだもの) で、

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m + \nu} \quad (8)$$

と表される。 $\nu$  次ベッセル関数の満たす公式  $(x^\nu J_\nu(\alpha x))' = \alpha x^\nu J_{\nu-1}(\alpha x)$ ,  $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$  を使ってよい。

(c)  $\omega \rightarrow 0$  の極限を考える。(b) の結果はどう近似されるか。( $\omega a/c$  について最低次までとる) またこのとき、2 枚の極板の外周の間において、Poynting ベクトル

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9)$$

の大きさと向きはどうなるか。 $\rho_0 \equiv Q_0/(\pi a^2)$  を用いてよい。

(d)  $\omega$  を充分大きくとれば、極板の中心と端とで電場の向きを逆にできることを説明せよ。

## 第 4 回 問題

第 1 回小レポートの再提出期限は 11 月 1 日 (金) 16:30 です。評価が B, F だった人は是非解き直して再提出してみてください。線を引いて追記部分を明示する、新たな用紙を追加するなどして、前回の解答を消さずに提出してください。

以後、単振動する電場  $\text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}]$  などを、 $\text{Re} [\dots]$  を略して  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  のように記すことがあります。

### 宿題 [9] (ローレンツ振動子モデル)

原子の古典的模型として、電子 (質量  $m$ , 電荷  $-e$ ) が原子核にばね (固有振動数  $\omega_0$ ) で束縛されているものを考える。原子に電場  $\mathbf{E}(t)$  がかったとき、電子の平衡点からの変位  $\mathbf{r}(t)$  は運動方程式

$$m \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r}(t) \right] = -e \mathbf{E}(t) \quad (1)$$

に従う。ただし、 $\gamma$  は振動の減衰を表す正の定数で、 $\gamma \ll \omega_0$  を仮定する。

(a) 振動数  $\omega$  の電場  $\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t}$  に対するこの原子の分極率  $\tilde{\alpha}(\omega)$  を求めよ。ただし、双極子モーメントを  $\mathbf{p}(t) = -e \mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(\omega) e^{-i\omega t}$  とするとき、 $\tilde{\alpha}(\omega)$  は  $\tilde{\mathbf{p}}(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  を満たす。

以下、このような原子を単位体積あたり  $n$  個含む希薄な絶縁性の気体を考える。

(b) (a) の結果から、この気体の複素誘電関数  $\tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + n \tilde{\alpha}(\omega)$  を求め、実部  $\text{Re } \tilde{\epsilon}(\omega)$  と虚部  $\text{Im } \tilde{\epsilon}(\omega)$  の概略を図示せよ。

(c) この気体の複素電気伝導率  $\tilde{\sigma}(\omega)$  とその実部  $\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega)$ 、虚部  $\text{Im } \tilde{\sigma}(\omega)$  を求めよ。また、関係式

$$\tilde{\epsilon}(\omega) - \epsilon_0 = i \tilde{\sigma}(\omega) / \omega \quad (2)$$

が成り立つことを確かめよ。

(d) この気体中を伝わる平面電磁波の振動数  $\omega$ 、波数  $k$ 、および複素誘電関数  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  の間に成り立つ関係式 (分散関係) を書き、電磁波の単位長さあたりの減衰係数が

$$\text{Im } k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{-\text{Re } \tilde{\epsilon}(\omega) + |\tilde{\epsilon}(\omega)|}{2\epsilon_0}} \quad (3)$$

で与えられることを示せ。

**宿題 [10] (誘電率の振動数依存性; 記憶が消える時間)**

問題 [9] で扱った原子の周りに束縛された電子 (質量  $m$ , 電荷  $-e$ ) についての古典的模型を再考する。外から電場  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  が加えられたときの電子の運動方程式は

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r}) = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (1)$$

であった。 $\omega_0$  はばね定数,  $\gamma$  は振動の減衰を表す正の定数である。

(a) この原子の双極子モーメントは  $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}(t)$  で与えられる。原子の密度を  $n$  とするとき、巨視的な分極ベクトルは  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$  であり、電束密度は  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$  と書ける。このとき、

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (2)$$

となることを示せ。これは誘電率  $\epsilon$  が外場の振動数  $\omega$  に依存することの解釈を与える。

(b) 外場がさまざまな振動数の重ね合わせとして

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3)$$

のように与えられる場合、電束密度  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  は時刻  $t$  についてのフーリエ変換を用いて

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4)$$

と表せる。誘電率を  $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega))$  とおくことで上記の表式が

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (5)$$

となることを示し、この式の解釈を述べよ。さらに、 $G(\tau)$  を電気比感受率  $\chi(\omega)$  を用いて表せ。(ヒント: 電場のフーリエ変換は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (6)$$

となる)

(c)  $\omega_0 > \gamma/2$  としよう。必要ならば  $\nu \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$  を用いて、以下に答えよ。

(i) 設問 (b) の結果の  $\chi(\omega)$  に設問 (a) の結果を用い、具体的に  $G(\tau)$  を計算せよ。留数定理を使い、積分経路も示すこと。

(ii) 被積分関数の極の位置を考慮することで、 $G(\tau)$  の  $\tau$  依存性には特徴的な性質があることがわかる。これは何と呼ばれているか。

(iii) 過去に加えられた外場の記憶が消える時間スケールは何で与えられるか述べよ。

(ここまで 2013/10/25 配布)

### その場問題 [11] (金属中の伝導電子; 表皮の厚さ)

金属中の伝導電子は、原子核に束縛されていないため、比較的自由に運動することができる。そこで、金属に電場  $\mathbf{E}(t)$  がかったときの電子の運動方程式を、

$$m \left[ \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right] = -e\mathbf{E}(t) \quad (1)$$

で記述する。これは問題 [9] で  $\omega_0 = 0$  とおいた場合に相当し、 $\gamma$  は電子の衝突頻度を意味する。単位体積あたりの電子数を  $n$  とする。

(a) 問題 [9] の結果を用いて、この金属の複素電気伝導率  $\tilde{\sigma}(\omega)$  と複素誘電率  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  を求めよ。

(b)  $\omega \ll \{\gamma, (\sigma_{dc}/\epsilon_0)\}$  (Hagen–Rubens 領域; Carl Ernst Bessel Hagen (1851–1923), Heinrich Rubens (1865–1922)) で、 $\tilde{\sigma}(\omega)$  が直流電気伝導率  $\sigma_{dc} = ne^2/m\gamma$  に帰着することを示せ。また、このとき、[9](d) の結果をもとに、電磁波が金属中に侵入する典型的な距離 (表皮の厚さ)  $\delta$  を求めよ。

(c) プラズマ振動数を  $\omega_p \equiv \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m}$  で定義する。 $\omega > \omega_p (\gg \gamma)$  の電磁波に対して金属は透明になることを示せ。(透明領域)

(d) 常温の銅では  $\sigma_{dc} = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  である。 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  とし、Hagen–Rubens 領域と透明領域に相当する  $\omega$  の範囲を求めよ。

## 第 5 回 問題

### 宿題 [12] (ドルーデ模型におけるクラマース–クローニッヒの関係)

ドルーデ模型 (問題 [11] で調べた模型) (Paul Karl Ludwig Drude (1863–1906)) で求めた金属の複素誘電率  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  が、クラマース–クローニッヒの関係 (Hendrik Anthony Kramers (1894–1952), Ralph de Laer Kronig (1904–1995))

$$\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\epsilon}(\omega) - \frac{\sigma_{\text{dc}}}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \tilde{\epsilon}(\omega') - \epsilon_0}{\omega' - \omega} \quad (2)$$

および総和則

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \, \omega \operatorname{Im} \left[ \frac{\tilde{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \omega_p^2 \quad (3)$$

を満たしていることを示せ。

ただし、 $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$  はコーシー (Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)) の主値 (principal value) を意味し、 $f(x)$  が実軸上に特異点  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $k < k'$  のとき  $x_k < x_{k'}$ ) を持つとき、

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon_1 \rightarrow +0} \lim_{\epsilon_2 \rightarrow +0} \cdots \lim_{\epsilon_n \rightarrow +0} \left( \int_{-R}^{x_1 - \epsilon_1} + \int_{x_1 + \epsilon_1}^{x_2 - \epsilon_2} + \cdots + \int_{x_n + \epsilon_n}^R \right) dx f(x)$$

で与えられるものとする。

**宿題 [13] (電磁波の分散; 群速度)**

波数スペクトル  $A(k)$  をもつ一次元平面波束 (光パルス) が、分散関係  $\omega = \omega(k)$  を満たす非伝導性媒質中を  $x$  方向へ進行するとき、時刻  $t$  におけるパルス波形は

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} \quad (1)$$

と書ける。ただし、エネルギー損失はないとする。いま、

$$A(k) = N \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{\alpha^2}\right], \quad (2)$$

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0) + \frac{\omega''_0}{2}(k - k_0)^2 \quad (3)$$

で与えられる場合に、以下の問に答えよ。

(a) 上式で  $k$  に関する積分を実行し、 $u(x, t)$  の表式を求めよ。 $t = 0$  のとき、 $u(x, 0)$  の包絡線は問題 [2](b) と同じガウス (Carl Friedrich Gauss (1777–1855)) 形になることを確かめよ。

(b)  $\omega''_0 = 0$  のとき、

$$|u(x, t)| = |u(x - \omega'_0 t, 0)| \quad (4)$$

が成り立つことを示せ。これは、パルスの中心が群速度

$$v_g = \omega'_0 = [d\omega(k)/dk]_{k=k_0} \quad (5)$$

で移動することを意味する。

(c)  $\omega''_0 \neq 0$  のとき、パルスの中心位置と幅はどのように時間変化するか。

(ここまで 2013/11/ 1 配布)

## 第 2 回小レポート 提出用紙

評価 A · B · F演習 \_\_ 組 学籍番号 \_\_\_\_\_ <sup>ふりがな</sup>氏名 \_\_\_\_\_

提出日 \_\_\_\_ 月 \_\_\_\_ 日 採点者 \_\_\_\_\_

配布: 2013 年 11 月 8 日 (金)

提出期限: 2013 年 11 月 15 日 (金) 16:30

(問) 問題 [1]–[7] と [8]–[14] から各 1 問、自身で黒板で発表した以外の問題を選び、合計 2 問の解答を簡潔にまとめよ。黒板や他の人の解答を写すのではなく、自分の言葉で書くこと。

(もし必要なら組・氏名を記入した A4 用紙を追加し、左上を綴じて提出してください。)

1 問目 問題番号: [     ]

### 問題 [14] (回路と電流の間に働く力)

真空中で、長方形をなす閉回路  $C$  に電流  $I_1$  が流れ、その近くに長い直線の電線があつて電流  $I_2 (> 0)$  が  $z$  方向に流れている。閉回路の中心と電線は距離  $d$  離れており、電線と平行な辺の長さを  $a$ 、もう一方の辺の長さを  $b$  とする。また、電線と閉回路の中心を含む  $z$ - $x$  平面と閉回路は角度  $\alpha$  をなすものとする。電流  $I_1$  の符号は電線と最も近い部分で  $I_2$  と平行のとき正にとる。

(A) 電流  $I_2$  の作るベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$  を求め、相互作用磁気エネルギーが以下のようになることを示せ。

$$W_{12}(d, \alpha) = + \int \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = + \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{4\pi} \ln \left[ \frac{4d^2 + b^2 + 4db \cos \alpha}{4d^2 + b^2 - 4db \cos \alpha} \right]. \quad (1)$$

(B) 電流の大きさをそれぞれ一定に保つとき、閉回路と電線の間に働く力を計算せよ。

(C) 閉回路の磁気モーメントを  $\mathbf{m}_1$ 、電流  $I_2$  が閉回路の中心に作る磁束密度を  $\mathbf{B}_2$  とする。 $d \gg a, b$  のとき、 $W_{12}$  は  $\mathbf{m}_1, \mathbf{B}_2$  を用いてどのように近似されるか。(計算の過程を示すこと)

---

2 問目 問題番号: [      ]

## 第 6 回 問題

### 宿題 [15] (液体の静的誘電率)

(第 5 回の演習までに [1]–[13] を全て解き終わった場合には、第 5 回のその場問題とします)

分極率  $\alpha$  の原子を単位体積あたり  $n$  個含む液体の静的誘電率  $\epsilon$  を求めよう。  
半径  $R$  の円形極板 2 枚を間隔  $H (\ll R)$  で配置した平行平板コンデンサーの極板間にこの液体を封入し、2 枚の極板にそれぞれ面電荷密度  $-\sigma, \sigma$  を与えたとする。極板間が真空のときに極板間に生ずる電場は  $\mathbf{E}_{\text{ext}} = (\sigma/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$  ( $\hat{\mathbf{z}}$  はコンデンサーの軸方向の単位ベクトル) であるが、液体中で実際に観測される電場  $\mathbf{E}_{\text{liq}}$  は  $\mathbf{E}_{\text{liq}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ind}}$  となる。ここで誘起電場  $\mathbf{E}_{\text{ind}}$  は、個々の原子に誘起された双極子モーメント  $\mathbf{p}$  が作り出す電場の重ね合わせである。

(a) 極板間のちょうど中間に存在する原子に着目し、この原子の感じる誘起電場が、

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{2np}{3\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \quad (1)$$

であることを示せ。ただし、原子間の位置の相関は無視する。

(ヒント：個々の原子は直径  $r$  をもち互いに距離  $r$  以内には接近しないと仮定しよう。誘起される電荷は、極板と接する液体表面および、着目した原子を中心とする半径  $r$  の球表面上に現れる。これらの電荷が作る誘起電場を求め、最後に  $r \rightarrow 0$  の極限をとる。)

(b) (a) で液体中に生ずる分極  $\mathbf{P}$  と外部電場  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  の関係を  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_0\mathbf{E}_{\text{ext}}$  と書くとき、

$$\chi_0 = \frac{n\alpha/\epsilon_0}{1 + \frac{2}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \quad (2)$$

を示せ。また、一般に、液体中での  $\mathbf{P}$  と  $\mathbf{E}$  の関係を  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}$  と書くとき、 $\chi$  と  $\chi_0$  は  $\chi = \chi_0/(1 - \chi_0)$  の関係にある。このことを用いて、液体の静的誘電率  $\epsilon$  が

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{1}{3}\frac{n\alpha}{\epsilon_0}} \quad (3)$$

と書けることを示せ(クラウジウス–モソッティの関係式(Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888), Ottaviano-Fabrizio Mossotti (1791–1863)))。

## 宿題 [16] (直線偏りと円偏り; ファラデー効果)

無限媒質中を  $z$  方向へ伝播する平面電磁波を考える。  $x$  方向,  $y$  方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\epsilon_x, \epsilon_y$  と書き、互いに直交する複素単位ベクトル  $\epsilon_{\pm} = (\epsilon_x \pm i\epsilon_y)/\sqrt{2}$  を導入するとき、電場ベクトルは、一般に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_+ \epsilon_+ + E_- \epsilon_-) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (1)$$

の形で与えられる。ここで  $E_+, E_-$  は一般に複素数であり、現実の電場ベクトルは  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  の実部である。

(A) いま、  $E_-/E_+ = r \exp(i\alpha)$  ( $r, \alpha$  は実数) の形に書けるとしよう。

(a)  $\alpha = 0$  のとき、空間内の与えられた一点で電場ベクトルの終点が描く軌跡は  $x$ - $y$  平面内の楕円であることを示せ。得られた結果は、 $r = 0$  のとき、左旋円偏波 (右円偏光) 左円偏光 (右旋円偏波) に帰着することを確かめよ。ただし、電場ベクトルが円を描くとき、

- 電磁波の進む方向に見て左 (右) 回りの場合に 左 (右) 旋円偏波
- 電磁波を 受ける側から見て左 (右) 回りの場合に 左 (右) 円偏光

という。

(b)  $\alpha \neq 0$  のとき、電場ベクトルの終点が描く図形は、(a) で求めた楕円の軸を角度  $\alpha/2$  だけ回転させて得られる楕円であることを示せ。得られた結果は、 $r = \pm 1$  のとき、直線偏波に帰着することを確かめよ。

(ヒント:  $\epsilon_x(\phi) \equiv \epsilon_x \cos \phi + \epsilon_y \sin \phi$ ,  $\epsilon_y(\phi) \equiv -\epsilon_x \sin \phi + \epsilon_y \cos \phi$ ,  $\epsilon_{\pm}(\phi) \equiv (\epsilon_x(\phi) \pm i\epsilon_y(\phi))/\sqrt{2}$  を用いてみよ)

(B) [10] で考えた絶縁性の気体に、 $z$  方向の一樣な定常磁場 (磁束密度  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ ) がかかっている。

(a) この気体の左旋円偏波 (右円偏光) および右旋円偏波 (左円偏光) に対する複素誘電関数をそれぞれ求めよ。

(b)  $z$  方向に進行する直線偏光の平面電磁波 (振動数  $\omega$ ) がこの気体に入射したとする。電磁波が気体中を距離  $l$  だけ進むとき、電磁波の偏光面はどれだけ回転するか (ファラデー (Michael Faraday (1791-1867)) 効果)。簡単のため  $\gamma = 0$  とし、 $|\omega^2 - \omega_0^2| \gg \{(eB_0/m)\omega, ne^2/(\epsilon_0 m)\}$  を仮定する。

(ここまで 2013/11/ 8 配布)

## その場問題 [17] (偏光のジョーンズベクトル)

$z$  方向に進む、偏光した光を考える。電場ベクトルが、実数  $E_{0x}, E_{0y}$  と位相  $\phi_x, \phi_y$ , および  $x, y$  成分に共通の波数  $k$  と角振動数  $\omega$  ( $\omega = ck$ ) を用いて、

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[ E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \mathbf{e}_x + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \phi_y)} \mathbf{e}_y \right] \quad (1)$$

と表されるとしよう。偏光の状態を表すためにジョーンズ (Robert Clark Jones (1916–2004)) ベクトルを導入する。 $E_0 \equiv \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$  と定義すると、

$$\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[ E_0 \begin{pmatrix} \frac{E_{0x}}{E_0} \\ \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i(\phi_y - \phi_x)} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \right] \quad (2)$$

となって、式の最右辺に現れる、(無次元の) 規格化されたベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{E_{0x}}{E_0} \\ \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i(\phi_y - \phi_x)} \end{pmatrix}$$

が、光の偏光状態を表すことがわかる。これを (規格化された) ジョーンズベクトルと呼ぶ。

(A) 以下の光の規格化されたジョーンズベクトルを求めよ。

- (a) 電場が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなす直線偏光
- (b) 右円偏光 (左旋円偏波)
- (c) 長軸が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなし、長軸と短軸の長さの比が  $1 : \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) の左回り楕円偏光 ( $\alpha = 0$  とすると (a) の結果に帰着することを確かめよ)

(B) 入射した光のうち、特定の方向に平行な電場の成分を透過させる物体を偏光子という。また、2つの直交する電場成分が透過するとき、その間に位相差を与える板を波長板という。

これらの光学素子を通じた光の偏光状態は、入射光のジョーンズベクトルに、ジョーンズ行列と呼ばれる 2次元正方行列を掛けることによって表現される。(第1成分が実数の規格化されたジョーンズベクトルを入力しても、通過後のジョーンズベクトルがそのような形になるとは限らない)

以下の光学素子に対応するジョーンズ行列を求めよ。

- (a) 電場が  $x$  方向の光の成分を通す偏光子
- (b) 電場が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなす光の成分を通す偏光子  
(まず、ジョーンズ行列  $M$  を持つ光学素子を、元の角度から  $\theta$  回転させたときのジョーンズ行列を  $M(\theta)$  として、 $M(\theta)$  を、 $\theta$  を含む行列と  $M$  とで表してみよう)
- (c) 電場の  $x$  成分に比べて  $y$  成分の位相を  $\pi/2$  遅らせる波長板 (四分の一波長板;  $\lambda/4$  板)
- (d) 電場の  $x$  軸と角度  $\theta$  をなす成分に比べて、それと直交する成分の位相を  $\pi$  遅らせる波長板 (半波長板;  $\lambda/2$  板)

(C) 上記の結果を用いて、直線偏光を光学素子に通して (A) の (b), (c) の光をそれぞれ得る方法を考え、説明せよ。

## 第 7 回 問題

### 宿題 [18] (導体への電磁波の垂直入射; 絶縁体界面での薄膜による反射波の除去)

(A) 振動数  $\omega$  の直線偏りの平面電磁波が、真空の自由空間から電気伝導率  $\sigma$ 、誘電率  $\epsilon$  の非透磁性媒質 ( $\mu = \mu_0$ ) へ垂直に入射する。

(a) 反射率  $R$  および、入射波に対する反射波の位相のずれ  $\phi$  をそれぞれ求めよ。

(b) 良導体 ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) では近似的に  $R \approx 1 - 2\omega\delta/c$ ,  $\phi \approx \pi$  となることを示せ。ここで  $\delta$  は問題 [11] で導入した表皮の厚さである。

(B) 3 つの非透磁性誘電体からなる層状の系を考える。3 つの誘電体はそれぞれ屈折率  $n_1, n_2, n_3$  をもち、3 次元空間内の  $z < 0$ ,  $0 \leq z \leq d$ ,  $d < z$  の部分を占めている。媒質  $n_1$  の中を  $z$  方向へ伝播する振動数  $\omega$  の直線偏りの平面電磁波が、媒質  $n_2$  を垂直に通りぬけて媒質  $n_3$  に進入する。

(a)  $k_i = (\omega/c)n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とし、電場は  $\mathbf{e}_x$  に平行として、以下  $x$  成分のみを表示する。媒質  $n_1$  中を  $\pm z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_{1\pm} \exp[i(\pm k_1 z - \omega t)]$ , 媒質  $n_2$  中を  $\pm z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_{2\pm} \exp[i(\pm k_2 z - \omega t)]$ , 媒質  $n_3$  中を  $+z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_3 \exp[i(k_3 z - \omega t)]$  としよう。透過率  $T \equiv (k_3/k_1)|E_3/E_{1+}|^2$  と反射率  $R \equiv |E_{1-}/E_{1+}|^2$  を求めよ。

(b)  $n_3 \neq n_1$  のとき、与えられた振動数  $\omega$  に対して反射波が存在しないようにしたい。 $d$  と  $n_2$  をどう選べばよいか。

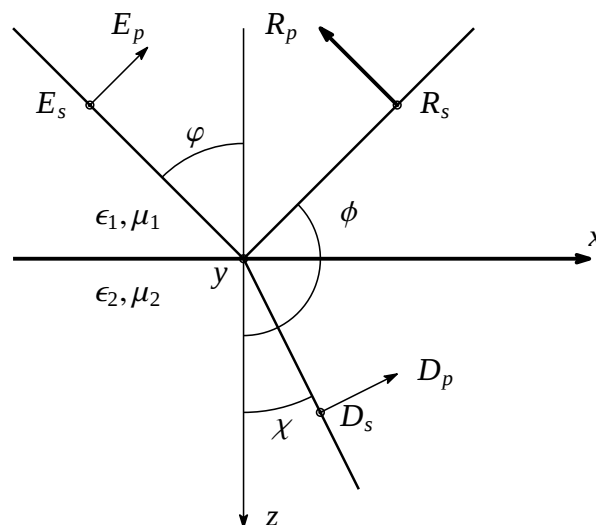


図 2: [19] で考える入射光 ( $E_s, E_p$ ), 反射光 ( $R_s, R_p$ ), 屈折光 ( $D_s, D_p$ ) を図示した。

## 宿題 [19] (電磁波の反射と屈折; Snell の法則と Fresnel の公式)

2 種類の誘電体が  $x$ - $y$  平面で接した系で、 $z < 0$  を占める誘電体 1 (誘電率  $\epsilon_1$ , 透磁率  $\mu_1$ ) から  $z > 0$  を占める誘電体 2 (誘電率  $\epsilon_2$ , 透磁率  $\mu_2$ ) に入射する電磁波の反射および屈折を考えよう。

まず、誘電体 1 での電場と磁束密度 ( $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ ) と、誘電体 2 での電場と磁束密度 ( $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ ) との間に成り立つ境界条件を調べる。自由電流および自由電荷はないとする。境界面に垂直な単位ベクトル  $\hat{\mathbf{z}}$ , 面内の任意の方向に向いた単位ベクトル  $\mathbf{t}_0$  を考え、 $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{t}_0$  (すなわち、 $\hat{\mathbf{z}}$  と  $\mathbf{t}_0$  の両方に垂直な  $x$ - $y$  面内の単位ベクトル) としよう。

境界面上に、 $\mathbf{t}_0$  に平行に線分  $\ell$  をとり、これを囲むような、向かい合う辺が  $\ell$  からそれぞれ  $+z$ ,  $-z$  方向に微小な長さ  $h$  だけずれた長方形  $A$  を考え、その辺からなる積分路  $C$  をとる。Maxwell の方程式より、いま、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  である。

(a) Stokes の定理を用いて  $C$  に沿った適当な量の線積分を考え、 $h \rightarrow 0$  の極限をとった後に  $\ell \rightarrow 0$  とすることにより、 $\mathbf{E}_1$  と  $\mathbf{E}_2$  の間に成り立つ式、 $\mathbf{B}_1$  と  $\mathbf{B}_2$  の間に成り立つ式を、それぞれ  $\mathbf{t}_0$  を用いて表せ。

さて、入射する平面波の電場を  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  とする (ただし  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}} \geq 0$ ) と、磁束密度は  $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  と書ける。反射波、屈折波の波数ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$  とし、電場をそれぞれ  $\mathbf{R}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ,  $\mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  と表す。 $\mathbf{k}$  が  $x$ - $z$  平面と平行のとき、 $\mathbf{k}'$  と  $\mathbf{k}''$  も  $x$ - $z$  面内にある。 $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$  が  $z$  軸の正の向きとなす角 (順に 入射角, 反射角, 屈折角) をそれぞれ  $\varphi, \phi, \chi$  としよう。 $\mathbf{E}_0$  は  $\mathbf{k}$  と直交する。 $\mathbf{E}_0$  の  $y$  成分を  $E_s$ ,  $x$ - $z$  面内の成分を  $E_p$  とする。ただし、 $E_p$  は  $\hat{\mathbf{x}}$  と鋭角をなす向きを正にとる。同様に  $\mathbf{R}_0$  の  $y$  成分を  $R_s$ ,  $x$ - $z$  面内の成分を  $R_p$ 、 $\mathbf{D}_0$  の  $y$  成分を  $D_s$ ,  $x$ - $z$  面内の成分を  $D_p$  としよう。

以下、簡単のため  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  とする。このとき誘電体 1, 2 中での電磁波の速さは  $c_1 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$ ,  $c_2 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}$  で与えられる。 $n_{12} \equiv c_1 / c_2 > 1$  とする。

(b)  $\delta_1 = \omega(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1})$  とすると、入射する平面波の各成分は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \cos \varphi \\ E_s \\ -E_p \sin \varphi \end{pmatrix} e^{-i\delta_1}; \quad \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1} \begin{pmatrix} -E_s \cos \varphi \\ E_p \\ E_s \sin \varphi \end{pmatrix} e^{-i\delta_1}. \quad (1)$$

と表される。

$$\delta'_1 = \omega(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_1}), \quad \delta_2 = \omega(t - \frac{x \sin \chi + z \cos \chi}{c_2}) \quad (2)$$

として、同様に反射波、屈折波の必要な成分を  $R_s, R_p, \phi$  や  $D_s, D_p, \chi$  などを用いて表し、上で得た境界条件を用いて、下記の Snell の法則および Fresnel の公式を示せ。

$$\sin \varphi = \sin \phi = n_{12} \sin \chi. \quad (3)$$

$$R_p = \frac{\tan(\varphi - \chi)}{\tan(\varphi + \chi)} E_p, \quad D_p = \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)} E_p; \quad (4)$$

$$R_s = -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)} E_s, \quad D_s = \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)} E_s. \quad (5)$$

(ここまで 2013/11/15 配布)

[18] (B) を下記の通り訂正します。

(B) 3 つの非透磁性誘電体からなる層状の系を考える。3 つの誘電体はそれぞれ屈折率  $n_1, n_2, n_3$  をもち、3 次元空間内の  $z < 0$ 、 $0 \leq z \leq d$ 、 $d < z$  の部分を占めている。媒質  $n_1$  の中を  $z$  方向へ伝播する振動数  $\omega$  の直線偏りの平面電磁波が、媒質  $n_2$  を垂直に通りぬけて媒質  $n_3$  に進入する。

(a)  $k_i = (\omega/c)n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とし、電場は  $\mathbf{e}_x$  に平行として、以下  $x$  成分のみを表示する。媒質  $n_1$  中を  $\pm z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_{1\pm} \exp[i(\pm k_1 z - \omega t)]$ 、媒質  $n_2$  中を  $\pm z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_{2\pm} \exp[i(\pm k_2 z - \omega t)]$ 、媒質  $n_3$  中を  $+z$  方向に進む電磁波の電場を  $E_3 \exp[i(k_3 z - \omega t)]$  としよう。透過率  $T \equiv (k_3/k_1)|E_3/E_{1+}|^2$  と反射率  $R \equiv |E_{1-}/E_{1+}|^2$  を求めよ。

(b)  $n_3 \neq n_1$  のとき、与えられた振動数  $\omega$  に対して反射波が存在しないようにしたい。 $d$  と  $n_2$  をどう選べばよいか。

また、[19] の図で、 $R_p$  の向きを左上向きに訂正します。(以上の訂正は KULASIS 掲載済)

### その場問題 [20] (全反射)

振動数  $\omega$  の電磁波が、 $z < 0$  を占める屈折率  $n_1$  の誘電体から  $z > 0$  を占める屈折率  $n_2$  ( $n_2 < n_1$ ) の誘電体に、入射角  $\theta$  で入射する。これらの誘電体はともに非透磁性である。 $\theta$  が臨界角  $\theta_c \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1)$  よりも大きいときには全反射が起こるが、その場合でも誘電体  $n_2$  内にはわずかに電磁波が侵入し、これをエバネッセント (evanescent) 波とよぶ。

入射波の電場ベクトルが入射面 (入射波の波数ベクトルと、境界面の法線ベクトルを含む平面。  $y$ - $z$  平面とする) に垂直である場合を考えよう。なお、このような入射波を直交偏波, TE 波 (transverse electric wave), s (senkrecht) 偏光などと呼ぶ。

(入射波の電場ベクトルが入射面に平行であれば、平行偏波, TM 波 (transverse magnetic wave), p (parallel) 偏光などと呼ぶ。)

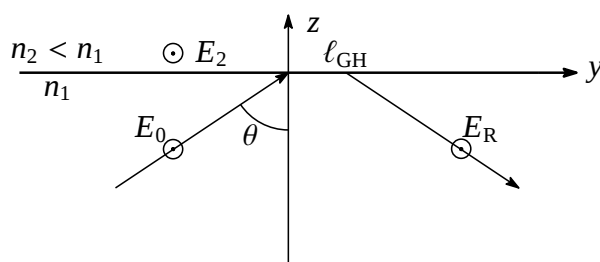


図 3: 屈折率の小さい誘電体への入射で起きる全反射

(a) 入射波の電場ベクトルの振幅を  $E_0$  とするとき、エバネッセント波の電場ベクトル, 磁場ベクトル, および複素ポインティングベクトルとその実部を計算し、電場と磁場がどのような偏光状態にあるかを述べよ。

(b) エバネッセント波の侵入長は  $\theta$  とともにどう変化するか。

(c) 反射光の位相を調べると、入射光に比べて  $y$  方向にある距離だけずれた位置から戻ってくるように見える。このずれの長さ  $l_{GH}$  を求めよ。(グース・ヘンシェン シフト (Hermann Fritz Gustav Goos (1883–1968), Hilda Hänchen (1919–)) という)

## 第 8 回 問題

### 宿題 [21] (非等方な誘電体)

非等方な誘電体中の平面電磁波の伝播を考えよう。簡単のため、誘電体は非透磁性 ( $\mu = \mu_0$ ) かつ絶縁体とする。

角振動数  $\omega$  の電磁波について、分極ベクトル  $\tilde{\mathbf{P}}(\omega)$  は、電場  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$  の関数として、線形の範囲で一般に (対称な) 電気感受率テンソル  $\chi(\omega)_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\tilde{P}^i(\omega) = \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (1)$$

と書け、電束密度  $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$  は誘電率テンソル  $\epsilon(\omega)_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\tilde{D}^i(\omega) = \epsilon_0 \tilde{E}^i + \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) = \sum_{j=1}^3 \epsilon(\omega)_{ij} \tilde{E}^j(\omega) \quad (2)$$

と書ける。

以下、 $\epsilon(\omega)_{ij}$  の  $\omega$  依存性が無視できるとする。 $\epsilon_{ij}$  を対角化する座標軸 (主軸) をとり、対角成分を改めて  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とし、誘電体中での電束密度の各成分が

$$D_i = \epsilon_i E_i \quad (i = 1, 2, 3; i \text{ に関する和はとらない}) \quad (3)$$

と書けるとしよう (以後添え字は下付きで書く)。波数ベクトル  $\mathbf{k} \equiv k\hat{\mathbf{k}}$  の平面電磁波を考える。

(a) 電場ベクトルを  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  とする。 $\tilde{\mathbf{E}}$  が

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) + \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{D}} = 0 \quad (4)$$

を満たすことを示せ。(これより、 $\tilde{\mathbf{D}}$  が  $\mathbf{k}$  と直交することがわかる。)

(b)  $v_i \equiv (\mu_0 \epsilon_i)^{-1/2}$  と定義する。電磁波の位相速度  $v = \omega/k$  が方程式

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{k}_i^2}{v_i^2 - v^2} = 0 \quad (5)$$

を満たすことを確かめよ。また、この方程式は  $v^2$  に関する 2 次方程式であり、その 2 つの解に対応する電磁波が存在することがわかる。それらの電束密度ベクトルが直交することを示せ。

(c) 複屈折について、簡潔に説明せよ。

## 宿題 [22] (円形導波管)

$z$  軸に沿って伸びた内径  $a$  の円形導波管 (断面が円形で中空の導体管) 内部を伝わる、振動数  $\omega$ , 波数ベクトル  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$  の電磁波について考える。

(A) 電場  $\mathbf{E}$ , 磁場  $\mathbf{B}$  が  $\exp(i(kz - \omega t))$  に比例する場合、円筒座標系  $(r, \theta, z)$  で各成分の間に以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$i\omega B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - ikE_\theta, \quad i\omega B_\theta = ikE_r - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad i\omega B_z = \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}, \quad (1)$$

$$-i\omega\mu_0\epsilon_0 E_r = \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - ikB_\theta, \quad -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_\theta = ikB_r - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_z = \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta}. \quad (2)$$

(B)  $\nabla_t^2 \equiv \nabla^2 - (\partial^2/\partial z^2)$  と定義する。 $B_z = 0$  で、 $E_z$  が方程式

$$\nabla_t^2 E_z + (\mu_0\epsilon_0\omega^2 - k^2)E_z = 0 \quad (3)$$

を満たすものを TM 波 (transverse magnetic wave) と呼ぶ。

(a) TM 波の電場・磁場の解を求めよ。モードごとに決まる、ある振動数 (遮断振動数) より小さな振動数の TM 波は伝播できないことがわかる。

(b) 上で求めたうち、遮断振動数が最小のモードについて、 $z$  軸に垂直な断面と  $z$  軸を含む断面それぞれにおける電気力線と磁力線の概略図を描け。

(ここまで 2013/11/29 配布)

## 問題 [14] について: 演習担当教員より

当初出題時の問題文(下記囲みから○を除いたもの)に、説明および条件設定が不足していたこと、加えて、以下のように、誤った添削を行ったことをお詫びいたします。

真空中で、長方形をなす閉回路  $C$  に電流  $I_1$  が流れ、その近くに長い直線の電線があつて電流  $I_2(>0)$  が  $z$  方向に流れている。閉回路の中心と電線は距離  $d$  離れており、電線と平行な辺の長さを  $a$ 、もう一方の辺の長さを  $b$  とする。また、電線と閉回路の中心を含む  $z$ - $x$  平面と閉回路は角度  $\alpha$  をなすものとする。電流  $I_1$  の符号は電線と最も近い部分で  $I_2$  と平行のとき正にとる。

(A) 電流  $I_2$  の作るベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$  を求め、相互作用磁気エネルギーが以下のようになることを示せ。

$$W_{12}(d, \alpha) = \bigcirc \int \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \bigcirc \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{4\pi} \ln \left[ \frac{4d^2 + b^2 + 4db \cos \alpha}{4d^2 + b^2 - 4db \cos \alpha} \right]. \quad (1)$$

(B) 閉回路と電線の間に働く力を計算せよ。

(C) 閉回路の磁気モーメントを  $\mathbf{m}_1$ 、電流  $I_2$  が閉回路の中心に作る磁束密度を  $\mathbf{B}_2$  とする。 $d \gg a, b$  のとき、 $W_{12}$  は  $\mathbf{m}_1, \mathbf{B}_2$  を用いてどのように近似されるか。(計算の過程を示すこと)

## 経緯の説明

この問題は過去の年度の演習から引き継いだものですが、元来 J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (3rd ed.) (Wiley, 1999) の **Problem 5.25** (p. 231) に基づくものです。出題にあたっては、軸を定義するなど、表現を変更しています。11 月 8 日にこの問題文を含む第 2 回小レポート課題を配布後、11 月 15 日の解答回収時に、受講者の方から、

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  中での電流分布  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  の位置エネルギー  $U$  は

$$U = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2)$$

となるため、(1)において、○に負号が入るべきではないか

という指摘を受けました。演習終了後に担当教員(手塚)と一部のクラス担当で検討しましたが、その際には上記教科書に立ち返ることなく、位置エネルギーと相互作用磁気エネルギーとの違いを見過ごし、○に負号が入るものとして(2問目として[14]を解答した答案については手塚が)添削を行い、[14]を選択していない人の問題文にも負号を書き込んで、11月29日に返却してしまいました。

相互作用の磁気エネルギーは、本演習の対象とする範囲の電磁気学の事項ではありますが、対応する講義でも直接詳しく扱われるわけではなく、本問での出題にあたっては、具体的に説明し定義すべきでした。また、(B)においては、何を一定に保ったときの力を求めるのかを指定すべきでした。(同書においては、電流  $I_1, I_2$  が一定の場合に求める問題となっています)

## 考え方

同書においては、5.16 章 (pp. 212–215) で、電流の流れていない状態から準静的に電流分布を形成するために電流源がする仕事として、磁気エネルギーが定義されています。まず、定電流  $I$  が流れる閉回路において、それを貫く磁束  $F$  が変化するときには回路に沿って誘導起電力  $\mathcal{E} = -dF/dt$  が生じ、これが伝導電子に及ぼす力を考えることにより、電流源がすべき仕事率が  $dW/dt = -I\mathcal{E} = IdF/dt$  となることが導かれます。

次いで、一般の電流分布について、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  が十分な精度で成り立つ(準静的な)場合を考えることにより、電流分布を微小な閉回路の集まりに分割しています。単位ベクトル  $\mathbf{n}$  に垂直な

平面  $S$  を囲む閉曲線  $C$  に沿った 1 つの閉回路において、断面積  $\Delta\sigma$  を電流  $J$  が流れているとすると、 $S$  を貫く磁束の変化  $\delta\mathbf{B}$  に伴って、この閉回路について電流源がする仕事  $\Delta(\delta W)$  は、ベクトルポテンシャルの変化  $\delta\mathbf{A}$  として、ストークスの定理を用いて

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int_S \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{B} \, da = J\Delta\sigma \int_S (\nabla \times \delta\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da = J\Delta\sigma \oint_C \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3)$$

と表されることが説明されています。ここで  $J\Delta\sigma d\mathbf{l}$  を微小体積を流れる電流  $\mathbf{J} \, d^3x \equiv \mathbf{J} \, d\mathbf{r}$  で置き換えることで、考える領域全体での仕事として、

$$\delta W = \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{r} \quad (4)$$

が導かれています。本問において、まず  $I_2 = 0$  で  $C$  上を  $I_1$  が流れている状況を考え、 $I_1$  を変えないように電源からエネルギーを供給しながら、別の電源により  $I_2$  を準静的に増加させると考えれば、(A) で  $\bigcirc$  を除いた

$$W_{12}(d, \alpha) = \int \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (5)$$

が得られ、(C) では、 $d \gg a, b$  とする近似のもとで、 $W_{12} \simeq \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2$  を得ます。

### 注意

上記 J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (3rd ed.) (Wiley, 1999) 5.16 章末尾で述べられているように、外部磁場 (磁束密度  $\mathbf{B}$ ) 中の永久磁気双極子モーメント  $\mathbf{m}$  を考えるとき、

- 外場の中に  $\mathbf{m}$  があるという状況を構成するのに要するエネルギーの総量と、
- ポテンシャルエネルギー  $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$  (永久双極子モーメントの外場から受ける力が  $-\nabla U$  に一致するようなものであって、 $\mathbf{m}$  を磁場中に配置するための仕事は含むが、 $\mathbf{m}$  を形成して一定に保つのに要する仕事は含まない)

とは異なり、区別すべきものです。

### 添削および成績評価上の対応

#### [14] を解答した人について

符号部分を除いて評価を行った結果、第 1 問と合わせての評価は解答した 6 人全員の場合について A となりました。再提出していただければ、添削の訂正を行います。

#### 2 問目として [14] 以外を選択した人について

評価が A とならなかった人の答えは、再提出すれば、第 1 問, 第 2 問個別に採点を行い、片方でも A に達していれば、成績評価上は A として扱うこととします。ただ、本小レポートについては、再提出は演習最終回を提出期限として何回でも受け付けることとしますので、なるべく、両問とも評価が A となるよう努力してください。

## 第 9 回 問題

### 問題 [23] (円筒形空洞共振器)

内径  $a$ 、長さ  $d$  の円筒形空洞共振器内に閉じ込められた TM 波の電場と磁場の空間分布を求めよ。特に、最低共振モードの共振振動数および電場・磁場の空間分布を求め、問題 [8] の結果と比較せよ。

## 宿題 [24] (Trouton-Noble のパラドックス)

真空中で、2つの慣性系、実験室系 (K 系) と、 $x$  方向に速さ  $v$  で動く観測者から見た系 (K' 系) を考える。重力の影響は考えない。時刻  $t = 0$  に、両系の原点が一致するものとする。

(A) K 系で観測される電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と磁束密度  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  を、K' 系で見た電場  $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$  と磁束密度  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$  の直交座標系での各成分を用いて表せ。ここで、 $\beta \equiv v/c$ ,  $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$  を用いて、

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad (1)$$

である。

絶縁体の充分硬い棒があり、端 A には  $q$  の、端 B には  $-q$  の電荷が固定されている。 $t < 0$  においては、棒は駆動装置に固定され、K 系で見ると、 $x$ - $y$  平面上で  $\overrightarrow{AB}$  方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}$  が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなすように、速度  $\mathbf{v} \equiv v\mathbf{\hat{x}}$  で運動していた。以下では、 $v \ll c$  として、Lorentz 収縮の影響などは無視する。 $(\gamma \approx 1 + \beta^2/2)$  を 1 と近似してよい

(B) 棒の長さを  $\ell$  とし、棒の midpoint が  $t = 0$  に原点  $O$  に到達するものとする。 $t = 0$  に棒の固定を取り外した後の棒の運動を考えよう。

(a) K' 系でこの系を見たときには、棒は静止を続けるはずである。端 A, B において、それぞれ他方の端にある電荷によって作られる電場  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2$  を、 $E \equiv q/(4\pi\epsilon_0\ell^2)$  を用いて表せ。

(b)  $t = 0$  において、K 系で見たときの端 A, B における電場  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  と磁束密度  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  を求め、端 A にある電荷に働く Coulomb 力  $\mathbf{f}_1$  と Lorentz 力  $\mathbf{F}_1$ , 端 B にある電荷に働く Coulomb 力  $\mathbf{f}_2$  と Lorentz 力  $\mathbf{F}_2$  をそれぞれ求めよ。

(c) Lorentz 力のモーメント  $\mathbf{N}$  を求めよ。また、電磁場が端 A の電荷にする仕事率  $W_1$ , 端 B の電荷にする仕事率  $W_2$  を求めよ。

$\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$  であるが、(a) で考えたように K' 系ではこの棒は静止を続けるので、K 系でこの系を見たときにも、棒は回転を始めずに、速度  $\mathbf{v}$  で運動を続けると考えられる。その理由を考えよう。

電磁場のエネルギーの流れの密度が Poynting ベクトル  $\mathbf{s} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  で表され、これに伴う運動量の密度  $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$  が存在するように、一般に、エネルギーの流れの密度  $\mathbf{s}$  には運動量密度  $\mathbf{g} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{s}$  が付随する。

(d) 棒の断面を単位時間に通過するエネルギーの流れ  $\mathbf{S}$  を求めることにより、長さ  $\ell$  のこの棒全体での、エネルギーの流れに伴う運動量の総量  $\mathbf{p}$  と、棒の中心が位置  $\mathbf{r}(= t\mathbf{v})$  に到達したときにおける、この運動量の点  $O$  に関するモーメント (角運動量)  $\mathbf{L}$  を求めよ。

(e)  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{N}$  の関係を考え、電磁場が棒に加える回転力のモーメント  $\mathbf{N}$  がなぜ棒の回転を生じないのか議論せよ。

## 第 10 回 問題

### 宿題 [25] (レンズによる光の屈折)

空気 (屈折率 1 とみなす) 中に置いたガラス (屈折率  $n$ ) の球面レンズによる光の屈折を考える。

(a) まず、半径  $r$  の球面を考え、光軸 (球面の中心) 上で球面の外側の点  $P$  から出た光が球面の内側の点  $Q$  に集まるとして、Snell の法則を用いて、近軸近似のもとで、点  $P, Q$  の位置の満たす関係を求めよ。

(b) 一方の面が半径  $r(> 0)$  の球面、他方の面が半径  $r'(< 0)$  の球面である十分に薄い球面レンズについて、 $1/f = (n-1)((-r')^{-1} + r^{-1})$  とすると、光軸上でレンズの手前側の距離  $a$  の点から出た光がレンズの奥側の距離  $b$  の点に集まったとすると、 $1/a + 1/b = 1/f$  となることを示せ。ただし、曲率半径は、手前側に凸のときに正となるように定義する。

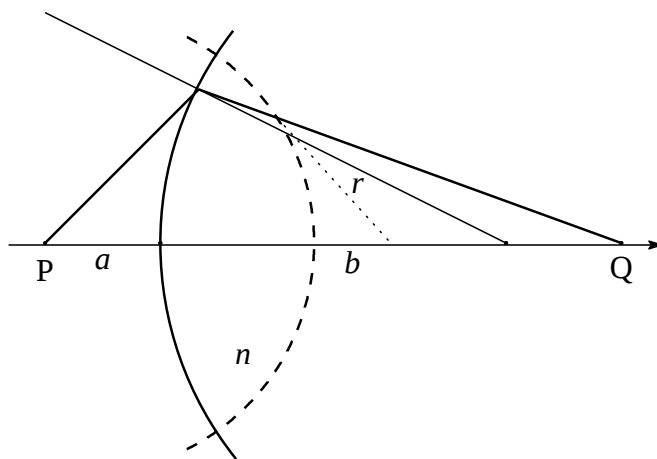


図 4: 球面, 薄い球面レンズによる光の屈折