2011 年度 解析力学 1 理論演習 (担当者: 手塚真樹)

期末レポート課題 解答例とアンケート結果

講義ウェブページ: <http://cond.scphys.kyoto-u.ac.jp/~tezuka/am1/>

返却: 2011 年 10 月 4 日 (火)–6 日 (木) 18:10 – 18:40 6 号館下

[1] 振動運動 (15)

質量 m の質点の 1 次元での運動を考える。 $x = 0$ で最小値 U_0 をとるポテンシャル $U(x)$ があり、 $U(-x) = U(x)$ を満たすとする。質点は $x = 0$ のまわりで振動運動している。振動周期 T がエネルギー E の関数として $T(E)$ として与えられると、ポテンシャルの形 ($x > 0$ の部分) は

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_{U_0}^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$$

となることを示せ。

解答例

エネルギー E のとき、振動の範囲は $E \leq U(x)$ より $x \leq x(E_0)$ で与えられる。この範囲において、エネルギー保存より

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E \quad \therefore \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (1)$$

$x = 0$ から $x = x(E)$ まで動く時間の 4 倍が T となることより、

$$T(E) = 4 \int_0^{x(E)} dx \frac{dt}{dx} = 4 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (2)$$

となる。積分変数を U に置き換えると

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_{U_0}^E dU \frac{1}{\sqrt{E-U}} \frac{dx}{dU}. \quad (3)$$

(3) の両辺に $1/\sqrt{U'-E}$ を掛けて $E = U_0$ から $E = U'$ まで積分し、積分の順序を交換すると、

$$\int_{U_0}^{U'} dE \frac{T(E)}{\sqrt{U'-E}} = 2\sqrt{2m} \int_{U_0}^{U'} dE \int_{U_0}^E dU \frac{1}{\sqrt{U'-E}\sqrt{E-U}} \frac{dx}{dU} \quad (4)$$

$$= 2\sqrt{2m} \int_{U_0}^{U'} dU \left(\int_U^{U'} dE \frac{1}{\sqrt{U'-E}\sqrt{E-U}} \right) \frac{dx}{dU} \quad (5)$$

(5) の () 内は、 $E = U + (U' - U) \sin^2 \theta$ と置換積分することにより

$$\int_U^{U'} dE \frac{1}{\sqrt{U'-E}\sqrt{E-U}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(U' - U) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{U' - U} \sin \theta \sqrt{U' - U} \cos \theta} = \pi$$

となるから、

$$\int_{U_0}^{U'} dE \frac{T(E)}{\sqrt{U'-E}} = 2\pi\sqrt{2m} \int_{U_0}^{U'} dU \frac{dx}{dU} = 2\pi\sqrt{2m} \int_0^{x(U')} dx = 2\pi\sqrt{2m} x(U') \quad (6)$$

となり、 U' を U に置き換えて与えられた式が示される。

[2] 質点を吊る糸が緩む条件 (15)

重力加速度の大きさを g とする。質量 m の粒子が、3次元空間中の定点から、長さ l の糸で吊るされて静止している。粒子に、水平方向に初速 v を与え、運動を観察した。運動の途中で糸が緩むのは v がどのような範囲にあるときか。ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ。

解答例

これは演習の [7] とほぼ同じ。定点を原点として鉛直下向きに x , 水平に y 軸をとり、 xy 平面上の運動のみを考えてよい。原点と粒子の距離を r , 糸の x 軸からの振れ角を θ とする極座標をとる。

拘束条件の式および、それを微分したものと、未定乗数 λ を導入したときのラグランジアンは

$$l - r = 0; \therefore \dot{r} = 0; \ddot{r} = 0. \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta + \lambda(l - r) \quad (2)$$

と書ける。たとえば $\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$ としてもよいが、その場合は λ は張力そのものにはならず、糸が張っているとき負になる。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda; \quad mr^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = -mgr \sin \theta \quad (3)$$

となる。拘束条件より、下記のように λ は糸の張力を与えていることがわかる。

$$0 = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda \therefore \lambda = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (4)$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (5)$$

糸が緩まない範囲において、エネルギー保存の式は

$$E = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{mv^2}{2} - mgl; \therefore gl \cos \theta = gl + \frac{1}{2}(l^2\dot{\theta}^2 - v^2). \quad (6)$$

となり、 λ を v と θ で表すと

$$\lambda = \frac{2}{l}(mgl \cos \theta + \frac{mv^2}{2} - mgl) + mg \cos \theta = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv^2}{l}. \quad (7)$$

拘束条件が常に満たされると仮定し、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を考え、 θ の最大値を θ_0 とする。

(1) $v^2 < 4gl$ のときは、 $\theta = \pi$ に到達する前に $\dot{\theta} = 0$ となるので、糸が緩まないと仮定すると振り子運動となる。 $\cos \theta_0 = 1 - v^2/(2gl) > -1$ となり、 $\theta_0 < \pi$ である。拘束条件のもとで λ の最小値は

$$\lambda_{\min} = mg(3 \cos \theta_0 - 2) + mv^2/l = mg(1 - \frac{v^2}{2gl}) \quad (8)$$

なので、 $v^2 > 2gl$ のとき、現実には途中で $\lambda < 0$ となり、糸が緩む。

(2) $v^2 \geq 4gl$ のときは、拘束条件のもとで $\theta = \pi$ に到達するので、糸が緩まないと仮定すると回転運動となる。 $\theta = \pi$ のときに λ が最小値 $\lambda_{\min} = -5mg + mv^2/l$ をとるので、 $v^2 < 5gl$ のときは、現実には途中で $\lambda < 0$ となり、糸が緩む。

以上より、 $\sqrt{2gl} < v < \sqrt{5gl}$ のときに糸が緩む。 $v \leq \sqrt{2gl}$ であれば、糸が緩まないまま、粒子は振動を続ける。 $v \geq \sqrt{5gl}$ であれば、糸が緩まないまま、粒子は定点を周回する。

[3] 斜面を転がる円板 (20)

重力加速度の大きさを g とする。半径 r , 質量 m の一様な円板が、水平面からの傾斜角 α の斜面を転がる。斜面と円板との間の静止摩擦係数を μ とする。

(1) 円板が滑らずに転がり落ちる場合について、ラグランジアンを書き、円板の重心の加速度の大きさを求めよ。

(2) α を大きくしていくとき、円盤が滑り始める α の値を求めよ。

解答例

(1) 最初の位置から ϕ 回転し、 l 転がったとすれば、滑らないときは

$$l = r\phi. \quad (1)$$

また、重心を通って円板に垂直な軸まわりの慣性モーメントは $I = mr^2/2$ (小テスト3で調べたので導出過程は不要)。運動エネルギー K を調べる。下記 (a)(b) のような方法が考えられる。

(a) (瞬間的な回転軸まわりの回転を考える) 斜面との接線まわりの慣性モーメントを I' として

$$I' = I + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2. \quad \therefore K = I'\dot{\phi}^2/2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\phi}^2. \quad (2)$$

(b) (回転運動と重心運動に分離する。回転運動分を $mr^2\dot{\phi}^2/2$ としている例が多かった。)

$$K = I\dot{\phi}^2/2 + m\dot{l}^2/2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)mr^2\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}mr^2\dot{\phi}^2. \quad (3)$$

また、位置エネルギー U は、上記 l を用いて $-mgl \sin \alpha$ となるので、

$$\mathcal{L} = K - U = \frac{3}{4}mr^2\dot{\phi}^2 + mgr\phi \sin \alpha. \quad (4)$$

オイラー・ラグランジュ方程式より、加速度 $a = \ddot{l} = r\ddot{\phi}$ は、

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\phi} = mgr \sin \alpha \quad \therefore a = r\ddot{\phi} = \underline{\underline{\frac{2}{3}g \sin \alpha}}. \quad (5)$$

(2) 円板が斜面から受ける抗力の大きさを N , 摩擦力の大きさを F とすると、 $F > \mu N$ となるときに滑る。

斜面に平行, 垂直な方向について、運動方程式はそれぞれ、

$$ma = mg \sin \alpha - F \quad \therefore F = mg \sin \alpha / 3. \quad (6)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha \quad \therefore N = mg \cos \alpha. \quad (7)$$

よって、 $F = \mu N$ のときには

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{\tan \alpha}{3}. \quad \therefore \alpha = \underline{\underline{\arctan(3\mu)}}. \quad (8)$$

[4] 補充問題 (10+) (一度も前で発表できなかった人は要解答。発表した人も解答してよい)

力学を応用したおもちゃを1つ挙げて、その動作する原理に関連し、これまでに配布した演習問題や小テストの問題と異なる問題を作り、自分で解答し、採点せよ。

なお、思いつかなければ、以下に答えてもよい。

質量 M , 慣性モーメント $I_1 = I_2 \neq I_3$ の対称こまが、対称軸 (x_3 軸) 上の一点で固定されたまま、重力を鉛直下方に受けて運動する状況を考えよ。ラグランジアンをオイラー角を用いて表せ。 θ を x_3 軸の鉛直軸に対する傾き, ϕ を鉛直軸まわりの方位角, ψ を x_3 軸まわりの回転角とすると、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta$$

と書けることを示せ。そして、エネルギーと運動量がそれぞれ保存することから、 θ についての運動は、1個の変数 $u \equiv \cos \theta$ の1次元の運動に対応することを示せ。

さらに、速く回転させて机の上に放したコマ (軸と机の接点が動かないとする) の運動について、放した瞬間に $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ という初期条件のもとで、歳差運動 (precession) と章動 (nutation) に着目して定量的に議論し、説明せよ。

解答例

シーソーの運動、重力を無視したときに揚力により円運動するブーメラン、起き上がりこぼしの運動などについての問題がありました。

問題の例に対する解答については省略します (各自、教科書を参照してください)。

[成績評価]

演習開始時の予告通りに行いました。

179人中、80-100点90人、70-79点11人、60-69点9人、0-59点69人(うち0点22人)

平均60.4点(0点を除くと68.9点、60点以上に限ると89.6点)

[アンケート結果] 回答は成績評価に無関係です。

(1) あなたは、この演習の初日を除く10回のうち、何回くらい出席しましたか。

結果: 平均7.62(87人)(複数の数字を書いている場合は平均を四捨五入して整数にしてから集計)

(3) 演習問題 [1] – [45] のうち、特によいと思った問題があれば番号を書いてください。

結果: [11](9人) [2][3][4][16][23](3人) [7][10][19][21](2人) など。

(4) 演習問題 [1] – [45] のうち、解析力学の理解を深めるのに役に立たなかったと思う問題があれば番号を書いてください。結果: [17](7人) [14](3人) [3][16][18][21](2人) など。

(5) 次のことについて、次の1-5から選んで記入してください。

(5: とてもあてはまる 4: ややあてはまる 3: どちらともいえない 2: あまりあてはまらない 1: 全くあてはまらない)(平均点/5の人数/1の人数を示す。有効回答数88人)

- a. 予習と復習を積極的に行った。(2.65/2/9)
- b. 演習に対して意欲的に取り組んだ。(3.05/4/6)
- c. 問題の構成は適切であった。(3.49/10/3)
- d. 問題の順序は適切であった。(3.45/11/1)
- e. 問題の難しさは適切であった。(3.43/18/3)
- f. 配布物は読みやすかった。(4.05/30/0)
- g. 問題の訂正方法は適切であった。(3.72/20/1)
- h. 教員のクラス巡回の方法は適切であった。(3.78/19/0)
- i. クラス担当者の話し方(言葉・声の調子など)は適切であった。(3.84/26/1)
- j. クラス担当者の指導内容は適切であった。(3.89/26/2)
- k. クラス担当者は、受講者が質問や意見を述べられるよう十分に配慮していた。(3.78/26/5)
- l. この演習を全体的に見たときに、満足している。(3.65/14/3)
- m. 自分と関心の近い後輩にも是非すすめたい演習である。(3.76/22/1)
- n. この演習の受講により、解析力学の理解が、事前に期待していた程度かそれ以上に深まった。(3.54/15/4)

(6) この演習をよくするために、意見・感想などを自由に書いてください。

問題の内容や数も含めた構成について、小テストの実施回数について、発表の形式について、解答の配布の要望など、多くのご意見をいただきました。ありがとうございます。

演習問題の解答については、今年度はこちらが作成したものを配布するのではなく、演習の中で発表を聞いて議論し、もし納得できなければ(あるいは演習で扱えなかった問題については)後で質問に来ていただくという方針で進めました。これについても今後担当の機会があれば検討します。