

2011 年度 解析力学 1 理論演習 (担当者: 手塚真樹) 小テスト 3

実施日: 2011 年 6 月 17 日

重力加速度の大きさを g とする。3 次元空間中にある質量 M の剛体を考える。剛体に固定され、重心を原点とするデカルト座標をとり、質量分布を $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z)$ とする。(重心を通る) x 軸に対して、慣性モーメント I_x が分かっているとす。この座標系で剛体が占める領域を V とする。

(1) 重心を原点にとったので $\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ である。

M および I_x を、 $\int_V (\cdots) d\mathbf{r}$ の形で、 $\rho(\mathbf{r})$ を用いて表せ。

また、 x 軸に平行で y 方向に距離 ℓ だけ離れた軸 ($(y, z) = (\ell, 0)$ で表される) に対する慣性モーメント I' を同様に $\rho(\mathbf{r})$ で表し、 $I' = I_x + M\ell^2$ となることを示せ。

(2) 剛体を半径 R の一様な円板とする。図 1 のように、中心から $\ell (< R)$ 離れた、円板に垂直な水平軸のまわりで微小運動させる。この軸に対する慣性モーメント I' を (1) の結果を用いて求めよ。

(3) 円板の振れ角 (鉛直方向と y 方向のずれ) を θ として、ラグランジアンを I' を用いて表せ。

(4) 微小振動 ($|\theta| \ll 1$) なので $\sin \theta \simeq \theta$ と近似できる。運動を単振動と近似して周期 T を求めよ。

そして、 T が最も短くなるような ℓ の値を R を用いて表せ。

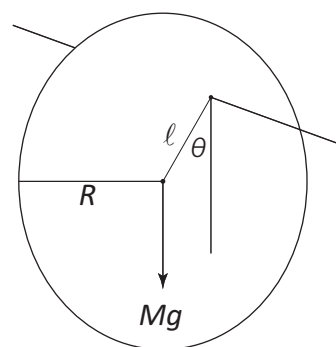


図 1 中心から ℓ 離れた水平軸に垂直な円板

問題 [16] の修正: (13) 式を下のようにします。

$$X_i = \sum_{l=1}^k \lambda_l A_{li} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

問題 [18] の修正: 以下のように全文を修正します。

静止座標系と、それと原点を共有し相対角速度 ω で回転する座標系で質点の運動を観測する。位置 $\mathbf{r}$ のとき、速度と加速度は、静止座標系で $(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ 、回転座標系で $(\mathbf{v}', \mathbf{a}')$ となった。ただし、回転座標系でのベクトルの時間微分は、回転座標系で (x'_1, x'_2, x'_3) と表されるベクトル $\mathbf{x}$ について、回転座標系の基底ベクトルを $\mathbf{e}'_j$ ($j = 1, 2, 3$) として、

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)' \equiv \sum_j \dot{x}'_j \mathbf{e}'_j$$

で定義され、この意味で $\mathbf{v}'$ は $\mathbf{r}$ の、 $\mathbf{a}'$ は $\mathbf{v}'$ の、回転座標系での時間微分である。

(1) $\mathbf{v}$ を $\mathbf{v}'$, ω , $\mathbf{r}$ を用いて表せ。

(2) $\mathbf{a}$ を $\dot{\omega}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{r}$ などのうち必要なものを用いて表し、各項の意味を説明せよ。

(3) 一般のベクトル $\mathbf{A}$ について、 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ と $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)'$ の関係を求めよ。