

2011 年度 解析力学 1 理論演習 第 2 回小テスト

2011 年 5 月 20 日実施 (追提出期限: 2011 年 5 月 27 日; 6 月 3 日返却予定)

[問] 最小作用の原理にしたがって、オイラー・ラグランジュ方程式を導こう。

ラグランジアン

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

によって特徴づけられる力学系を考える。時刻 $t = t_1$ および $t = t_2$ に、系がそれぞれ $q^{(1)}$ および $q^{(2)}$ にあるとすると、系はその間、作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

が可能な最小の値をとるように運動する。 S が極小値をとるような $q(t)$ を求めるための微分方程式を導こう。

(1) $q = q(t)$ が S を最小にするとして、そのかわりに微小量だけずれた関数 $q(t) + \delta q(t)$ を考える。ただし、 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ とする。 q を $q + \delta q$ に変えたときの S の変化 δS を、 δq および $\delta \dot{q}$ について 1 次まで、 $\int_{t_1}^{t_2} (\dots) dt$ という形に書け。(ヒント: $\partial L / \partial q, \partial L / \partial \dot{q}$ を用いる)

(2) (1) の結果について、 $\delta \dot{q} = (d/dt)\delta q$ であることを利用して、 $\dot{q}$ を含む項を t について部分積分せよ。 S が極小となるためには、任意の δq に対して、 δS の δq について 1 次の項が 0 となる必要がある。このことから、オイラー・ラグランジュの方程式を示せ。

(3) 別のラグランジアン $L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ があって、これは、ある座標と時間の関数 $f(\mathbf{q}, t)$ の時間についての完全導関数を用いて

$$L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t)$$

と書けるとしよう。このとき、 L' に対応する作用 S' を考えると、条件 $\delta S' = 0$ は条件 $\delta S = 0$ と一致することを確認せよ。

(4) 質量 m の 1 個の質点が $\mathbf{r}$ にあるとき、ポテンシャルエネルギーが $U(\mathbf{r})$ となる系のラグランジアンは

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r})$$

で与えられる。オイラー・ラグランジュの方程式から、質点の運動方程式を導け。

[お詫び] 第 1 回配布分の課題 [12] について、前回 (5 月 13 日)、訂正の連絡を行いましたが、この変更は不適当でした。下記に再度 訂正 し、受講生の皆様にご迷惑をおかけしたことをお詫びいたします。(科目担当者 手塚真樹)

[12] Laplace-Runge-Lenz ベクトル

中心力ポテンシャル $V(r)$ 中を運動する質量 m の質点のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \quad (r \equiv |\mathbf{r}|)$$

で与えられる。ただし、位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とした。運動量を $\mathbf{p} (\equiv m\dot{\mathbf{r}})$ と書く。

- ϵ を定数ベクトルとして、微小変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \epsilon \times \mathbf{r}$ に対するラグランジアンの変化を調べ、角運動量 $\mathbf{L} (\equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p})$ が保存量であることを示せ。
- (この系で実現する運動について) 微小変換 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + (\epsilon \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}$ に対するラグランジアンの変化分が

$$\delta L = r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon \cdot \mathbf{r}}{r} \right)$$

で与えられることを示せ (オイラー・ラグランジュ方程式により $\ddot{\mathbf{r}}$ を消去せよ)。

- 逆 2 乗則に従う力 (定数 k があって $-\partial V / \partial r = kr^{-2}$ と書ける) の場合、上の δL が時間の全微分となることを確かめよ。Noether の定理を用いて、上記の変換に対応した保存量が $\mathbf{p} \times \mathbf{L} + m k \mathbf{r} / r$ で与えられることを示せ。

第2回小テスト 解答・提出用紙

評価 A・B・F

提出日 ____ 月 ____ 日 採点者 _____

(ここまでの演習についてのコメントがあればこの下に記入してください)

〔小テスト解答〕 必要なら裏面も使ってかまいません。