

2011 年度 解析力学 1 理論演習 (担当者: 手塚真樹) 課題 3

配布日: 2011 年 6 月 17 日

[33] 1 次元の振動子系 (One-dimensional chain of coupled oscillators)

N 個の質点からなる 1 次元の系がある。質点の座標を順に $x_1, x_2, \dots, x_N$ とする。この系のラグランジアンが

$$L = \sum_{j,k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k - \frac{1}{2} k_{jk} x_j x_k \right)$$

与えらるゝとする。ただし、 $\mathbb{K} \equiv (k_{jk})$, $\mathbb{M} \equiv (m_{jk})$ は正定値の N 次元対称行列である。

(1) このとき、振動解 $x_j = A_j e^{i\omega t}$ を仮定して運動方程式を解き、固有振動数 ω が満たすべき方程式を求めよ。また、 ω が実数である (つまり、振幅が減衰しない振動となる) ことを確認せよ。

(2) 質点が 3 個で、質量が順に m, M, m であり、1 個目と 2 個目、2 個目と 3 個目がそれぞれバネ定数 k のバネでつながっているときの固有振動数をすべて求めよ。

[34] 結合振動子系 (Coupled oscillators)

N 個の 1 次元振動子 (j 番目の質量 m_j , 変位 q_j とする) が相互作用している。運動方程式が

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{k=1}^N b_{jk} q_k \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

と表され、 $N-1$ 個の固有振動数は $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{N-1}$ を満たす。この系は、主軸変換

$$q_j = \sum_{l=1}^{N-1} c_{jl} Q_l \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

で基準座標 Q_l ($l = 1, 2, \dots, N-1$) に移り、運動方程式が

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N-1)$$

と対角化されとしよう。

(1) r 番目の質点の質量のみを m_r から $m_r + \delta m_r$ に変えたとしても、新しい固有振動数 $\{\omega'_l\}$ ($l = 1, 2, \dots, N-1$) は、次の方程式の解として求まることを示せ。

$$\sum_{l=1}^{N-1} \frac{c_{rl}^2}{\omega'^2 - \omega_l^2} = - \frac{1}{\omega'^2 \cdot \delta m_r}.$$

また、このことから、1 つの振動子の質量を大きくすると、全ての固有振動数は小さくなること、そして、 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{N-1}$ の大小関係は変わらないことを示せ。

(2) バネ定数を k としたとき、ポテンシャルエネルギー U の変化分は一般に、係数 $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$ を用いて $\delta U = \frac{k}{2} (\sum_{l=1}^{N-1} d_l Q_l)^2$ の形に書けることについて説明し、 k を大きくすると、全ての固有振動数は大きくなることと、大小関係が変わらないことを確認せよ。

[35] パラメタ励振 (Parametric oscillation)

単振動の周期が (振動自体に比べてゆっくりと) 時間的に変化する系を考えよう。運動方程式を

$$\ddot{x}(t) = -q(t)x(t)$$

と書く。 $q(t)$ が $q(t+T) = q(t)$ を満たす周期関数であると仮定する。運動方程式は 2 階の常微分方程式なので、一次独立な 2 つの解 $x_1(t), x_2(t)$ を持つ。

(1) 行列式が 1 の 2×2 行列 $A \equiv (a_{ij})$ があって、

$$x_1(t+T) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad x_2(t+T) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 解が振動するとき安定, 指数関数的に発展するとき不安定な解と呼ぶ。解 x_1, x_2 が安定になる条件を A の固有値に着目して求めよ。

(3)

$$q(t) = \omega^2(1 + h \cos[(2\omega + \epsilon)t])$$

(h, ϵ は微小量とし、一次まで考える) の場合に、解が不安定になる条件を求めよう。解の形を

$$x(t) = a(t) \cos[(\omega + \epsilon/2)t] + b(t) \sin[(\omega + \epsilon/2)t]$$

として、 $a(t), b(t)$ の時間変化が遅いと仮定して運動方程式に代入し、高振動数の項を無視すると、

$$\dot{a} = \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{h\omega}{4}\right)b, \quad \dot{b} = \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{h\omega}{4}\right)a,$$

が得られることを示せ。また、この結果を用いて、解が不安定になる条件を求めよ。

[36] 非線形振動: 周期解 (Nonlinear oscillation: periodic solution)

非線形振動の周期解を摂動的に求めよう。与えられた関数 $f(x, \dot{x})$ について、微分方程式

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$$

を、 μ を正の微小量として、 μ の 1 次の項のみ残す近似の範囲で解くことを考える。周期解の周期を $2\pi/\omega(\mu)$ とする。

(1) 初期条件を $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ として、解と振動数の μ での展開を、それぞれ

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1 + \cdots, \quad \omega(\mu) = 1 + \mu\omega_1 + \cdots$$

とする。また、 $\tau \equiv \omega t$ とし、 $\frac{d}{d\tau}$ を $'$ で表す。このとき、 $x_0(t) = A \cos \tau$ と選ぶと、 x_1 は

$$x_1'' + x_1 = 2\omega_1 A \cos \tau + f(A \cos \tau, -A \sin \tau)$$

を満たすことを示せ。また、 $f(A \cos \tau, -A \sin \tau)$ のフーリエ級数展開を

$$f(A \cos \tau, -A \sin \tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(A) \cos n\tau + b_n(A) \sin n\tau]$$

の形に展開したとき、摂動解が周期解になる条件は

$$2\omega_1 A + a_1(A) = 0, \quad b_1(A) = 0$$

で与えられることを示せ。

(2) 単振り子の運動に関連して、 $\ddot{x} + x = \mu x^3$ ($0 < \mu \ll 1$) を上の方法で解析せよ。

(3) van der Pol の方程式 $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$ ($0 < \mu \ll 1$) の周期的摂動解を求めよ。解の安定性はどうか?

[37] Larmor の歳差運動 (Larmor precession; Joseph Larmor (1857–1942))

中心力ポテンシャル $V(r)$ の中を電子が運動している。電子の質量を m , 電荷を $-e$ とする。この系に、十分に弱い一様磁場 B を作用させる。 $B \parallel \hat{z}$ とする。

(1) ラグランジアンが角運動量ベクトル $\ell \equiv m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ を用いて以下で表されることを説明せよ。

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \ell - V(r).$$

(2) 電子の軌道が z 軸周りに角速度 $\frac{e|\mathbf{B}|}{2m}$ で歳差運動することを示せ。

[38] ジャイロ作用 (Gyroscopic effects)

(1) 機首に 1 個のプロペラを持つ飛行機が、速さ v で半径 R の円を水平に左旋回している。プロペラの質量を M , 慣性モーメントを I とする。プロペラは後方から見て時計回りに回転しており、飛行機とともに動く座標系で見た角速度を ω とする。軸受けからプロペラが得るトルクを求めることにより、その反作用として飛行機に働くトルクを調べよ。

(2) 質量 M , 中心軸まわりの慣性モーメント I の回転対称な弾丸に、軸に平行な角速度ベクトル ω を与え速度 v で発射した。 $\omega \parallel v$ とする。 ω が十分に $(I|\omega|^2 \sim M|v|^2)$ 大きいとき、 $\omega = 0$ の場合に比べて、外部から加えられた力に対する弾丸の進行方向の変化が小さくなることを説明せよ。ジャイロ作用またはコマの原理を用いよ。

[39] ヨーヨー (Yo-yo)

単純なヨーヨーを考えよう。半径 r , 質量 M , 慣性モーメント I の円板に細く軽い糸を巻きつけ、糸を鉛直に上下させる。簡単のため、円板の運動は鉛直方向 (z 方向) に限られるものとする。糸の張力を T , 円板の回転角を θ として、 z 方向と重心まわりの運動についてそれぞれ運動方程式を書き、解を求めよ。円板の質量分布が一様な場合、どれだけの加速度で引き上げれば円板の加速度が上向きとなるか。その他、ヨーヨーの運動について知ることを述べよ。

[40] バネと糸で吊るされた質点 (Mass points hung with a spring and a string)

天井からバネ定数 k のバネで吊るされた質量 m の質点 A に、さらに長さ L の糸でもう 1 個の質量 m の質点 B を吊るす。B を鉛直下方に引き、バネが自然長から l 伸びた状態で静かに手を離す。

(1) 糸がゆるむための条件は何か?

(2) 2 つの質点が衝突する条件を求めよ。重力は充分弱いとしてよい。

[41] 非線形振動: 摂動論 (Nonlinear oscillation: perturbative treatment)

Let us consider an anharmonic oscillator described by the Lagrangian

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + ax^4 \quad (a > 0).$$

(1) Plot the potential and determine the condition for oscillatory motion in terms of the total energy E .

(2) Assuming that a is sufficiently small, by solving the equation of motion up to the first order in a , obtain the oscillation period.

[42] 分散関係 (Dispersion relation)

(1) 質量 m の粒子が、隣同士バネ定数 K , 自然長 a のバネによりつながれて、一直線上に並んでいる。各粒子の位置を x_j とする。ただし、 $x_j^0 \equiv aj$ とするとき、 $|x_j - x_j^0| \ll a$ であるとしよう。粒子の数が無限個の場合に、 j 番目の粒子に関する運動方程式を求めよ。また、解として

$$x_j = Ae^{i(kx_j^0 - \omega t)}$$

を仮定して、 ω を k (ただし、 $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$) の関数として表せ。

(2) 周期的境界条件 $x_{N+j} = x_j$ があるとうなるか? これは、粒子の数が N 個であり、長さがほぼ Na のリング上に拘束されて運動することに相当する。

(3) 粒子の数が無限個で、交互に質量 m, M を持つ場合の分散関係 (ω と k の関係) を求めよ。

[43] 時間依存のラグランジアンと振動 (Oscillation under a time-dependent Lagrangian)

1 次元 (x 方向とする) での質点の運動が次のラグランジアンで記述されるとする。

$$L = e^{2at} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right). \quad (a > 0)$$

(1) 運動方程式を求め、調和振動子との違いを述べよ。

(2) 時間に依存しないラグランジアンで記述される系での運動エネルギーに対応する

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L$$

は保存しないが、

$$\tilde{E} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (\dot{x} + ax) - L$$

は保存量となることを示せ。

[44] 非線形振動: 単振り子の支点の上下 (Nonlinear oscillation: a simple pendulum with a vertically oscillating pivot)

Let us consider the small amplitude oscillation of a simple pendulum, which consists of a massless rod of length l and a mass point of mass m moving in a vertical plane. The pivot is oscillating vertically as $z_p = \lambda \cos \omega t$. Let us assume that $\lambda \ll l$.

(1) Write down the Lagrangian of this system.

(2) The motion is known to become unstable if the angular frequency of the pivot motion is sufficiently close to $2\sqrt{g/l}$. For $\omega = 2\sqrt{g/l} + \epsilon$ with $|\epsilon| \ll \sqrt{g/l}$, find the condition for such instability.

[45] 棒でつながれた 2 質点の振動 (Oscillatory motion of two mass points connected by a rod)

質量 m, M ($m < M$) の 2 質点を長さ l の棒でつないだ物体があり、鉛直面内の半径 R の円内を動いている。円周と質点の間の摩擦は無視できる。

(1) 重力加速度を g として、ラグランジアンを書け。

(2) 両質点が円周に接触して釣り合いの位置にあるとき、棒の傾きを求めよ。この位置のまわりでの微小振動の周期はどうなるか?