2011 年度 解析力学 1 理論演習 (担当者: 手塚真樹) 課題 2

配布日: 2011 年 5 月 20 日　　　最終更新: 2011 年 6 月 14 日

[17]　ベクトル解析の復習 (vector analysis)

3 次元空間の各点 $\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$ で定義されたスカラー量 $f(\boldsymbol{r})$ およびベクトル量 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ がある。

(1) $\mathrm{grad}\, f$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$ を $\partial/\partial x$ など、および $\boldsymbol{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ を用いて定義し、これらの量の意味について、わかりやすく説明せよ (f および $\boldsymbol{v}$ の各成分は x, y, z で何度でも微分可能とする)。

(2) ベクトルの外積は、$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j B_k$ と書ける。ここで、 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$ (i, j, k のうちどの 2 つの入れ替えについても反対称), $\epsilon_{123} = 1$ である。以下の公式を示せ。

(a) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$　　(b) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$

(c) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$　　(d) $[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})] \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = [\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]^2$

(3) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0$ を示せ。

[18]　回転する座標系 (rotating reference frame)

静止座標系と、それと原点を共有し相対角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する座標系で質点の運動を観測する。位置 $\boldsymbol{r}$ のとき、速度と加速度は、静止座標系で $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, 回転座標系で $(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{a}')$ となった。ただし、回転座標系でのベクトルの時間微分は、回転座標系で (x_1', x_2', x_3') と表されるベクトル $\boldsymbol{x}$ について、回転座標系の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}'_j$ $(j = 1, 2, 3)$ として、

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)' \equiv \sum_j \dot{x}_j' \boldsymbol{e}'_j$$

で定義され、この意味で $\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{r}$ の、 $\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{v}'$ の、回転座標系での時間微分である。

(1) $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}$ を用いて表せ。

(2) $\boldsymbol{a}$ を $\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}$ などのうち必要なものを用いて表し、各項の意味を説明せよ。

(3) 一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ について、$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ と $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)'$ の関係を求めよ。

[19]　ケプラー運動 (Kepler motion; Johannes Kepler (1571–1630))

平面上で原点 O を中心とする中心力ポテンシャル $V(r)$ 中を動く質量 m の質点 P の運動を調べよう。簡単のため、 $V(r)$ は r に関して単調に増加し、$r \to \infty$ で $V(r) \to 0$ となると仮定する。

(1) 極座標 (r, ϕ) を用いてラグランジアン L を書き、運動方程式を導出せよ。L が ϕ を陽に含まないことを用い、線分 OP が単位時間に掃く面積が一定であることを示せ。さらに、全エネルギー E が保存することから、(たとえば連続して $\dot{r} > 0$ である間について) 時刻 t を r についての積分で表し、その結果を用いて、 ϕ と r の関係を示す式を求めよ。

以下、$V(r) = -k/r \quad (k > 0)$ とする。

(2) E が正の場合、質点の軌道は双曲線になることを示せ。

(3) E が負の場合、質点の軌道は楕円になることを示し、楕円の長半径 a と回転周期 T の関係を求めよ。$k = gMm$ のとき、T は gM と a で決まり、m や角運動量に依らないことを確認せよ。

[20] 歳差運動 (precession)

平面上で、中心力ポテンシャル $V(r) = -k/r + h/r^2$ の中を動く質量 m の質点を考える。

(1) 全エネルギーを E とし、質点の軌道を調べよう。$r = 0$ の周りに回転する座標で見てケプラー運動と同じになる運動を、歳差運動という。質点の軌道を極座標 (r, ϕ) で表し、変数変換により、運動方程式の解を求めよ (前問の結果を利用)。この系で、質点の軌道が歳差運動することを示せ。

(2) $E < 0$ で、$V(r)$ の第 2 項の効果が充分小さいとき、質点の角運動量の大きさを ℓ とすると、歳差運動の周期は、$h = 0$ のときの回転周期を T として $\frac{\ell^2}{mh}T$ で近似されることを示せ。

[21] 磁気単極子 (magnetic monopole)

磁気単極子が存在すると仮定しよう。原点にある磁気単極子により生じる磁場 $\boldsymbol{B} = b\boldsymbol{r}/r^3$ によるローレンツ力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ と、ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}) = -k/r + \frac{q^2b^2}{2mr^2}$ による中心力場を受けて運動する、質量 m, 電荷 q の粒子を考える。

(1) 粒子の角運動量ベクトルを $\boldsymbol{L}$ とする。$\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{L} - qb\boldsymbol{r}/r$ が保存することを示せ。

(2) 粒子の運動量ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。ケプラー問題で Laplace-Runge-Lenz ベクトル $\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\boldsymbol{r}/r$ が保存したことと比較し、 $\boldsymbol{C}' \equiv \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{D} - mk\boldsymbol{r}/r$ が保存することを示せ。

[22] 空気抵抗 (air drag)

鉛直上向きに y 軸, 水平方向に x 軸をとり、2 次元平面内の質点の運動を考える。原点から斜め上に投げられた質量 m の質点が、重力加速度 g および空気抵抗力 F を受けて運動する。F は速さ (速度 $\boldsymbol{v}$ の絶対値) v にのみ依存すると仮定し、$F(v) = mgf(v)$ と表す。

(1) $\boldsymbol{v}$ と x 軸のなす角を θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とする。一般の $f(v)$ について、次のホドグラフ (hodograph) 方程式が成り立つことを示せ。(軌跡が上に凸であることに注意し、軌跡に沿った方向と軌跡に垂直な方向について運動方程式をたてるとよい。軌跡に沿った長さを s とする。)

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta + f(v)}{\cos\theta}.$$

(2) 最初の投射角を θ_0 として、(x, y, t) を、それぞれ θ に関する定積分の形に表せ。

(3) $f(v) = b/v$ (b は定数) の場合に、v を θ を用いて表せ。 より一般に、 $f(v) = \alpha v^n$ と書ける場合、ホドグラフ方程式は解けるか。

[23] コリオリの力 (Coriolis force; Gaspard-Gustave Coriolis (1792–1843))

地球上の (天文) 緯度 α (鉛直線が赤道面となす角度を天文緯度と呼ぶ。ここでは北半球で $\alpha > 0$ となるようにとる) の位置にいて、地球とともに動く人が、地球の半径に比べて小さな距離にわたる、質量 m の粒子の地表近くでの運動を観測する。地球の自転の角速度を ω とする。

(1) z 軸を鉛直上向き, y 軸を北向きにとったとき、観測者にとっての運動方程式が、 ω が充分小さいとしてコリオリ力のみ考えると下記で表されることを示せ。

$$m\ddot{x} = 2m\omega(\dot{y}\sin\alpha - \dot{z}\cos\alpha) \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x}\sin\alpha \tag{2}$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x}\cos\alpha \tag{3}$$

(2) 地上高さ h のところから初速 0 で自由落下する粒子の運動を調べよ。

(3) Waterloo(北緯 50.72 度) 付近で、地表から、地球の自転がなければ真北に 10 km 飛んで発射の 20 秒後に地面に衝突するように、質点を発射した。地球の自転によるずれはどのくらいになるか。重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とし、空気抵抗は無視する (地面を平面と近似して計算してよい)。

(発展) 関心があれば、偏西風と貿易風について調べ、簡単に説明せよ。台風の風はなぜ左回りか?

[24] 井戸型ポテンシャルによる散乱 (scattering by a finite potential well)

(1) 3 次元空間での粒子の散乱に関し、微分断面積および全断面積について説明せよ。

(2) 以下の井戸型ポテンシャルによる散乱について、微分断面積 $\sigma(\Theta)$ および全断面積 $\sigma_{\rm total} \equiv 2\pi\int \mathrm{d}\Theta \sin\Theta\sigma(\Theta)$ を入射粒子のエネルギー E の関数として求めよ。($a > 0$, $V_0 > 0$, $H(x)$ は Heaviside (1850–1925) の階段関数)。

$$U(\boldsymbol{r}) = -V_0 H(a - |\boldsymbol{r}|); \qquad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

[25] クーロン型の中心力ポテンシャルなどによる散乱 (Scattering by central forces including a Coulomb-type one)

中心力ポテンシャル $V(r) = K/r, U(r) = k/r^2$ による散乱を調べよ。エネルギーが E のとき、微分断面積 $\sigma(\Theta)$ はそれぞれどうなるか。

[26] 慣性テンソル (tensor of inertia)

3 次元空間での剛体の運動を考えよう。慣性座標系 (実験室系) XYZ で $\boldsymbol{R}$ の位置に慣性中心 O がある剛体について、$\boldsymbol{R}$ を原点とし、剛体とともに運動する運動座標系 xyz を考える。剛体上の点 P の位置ベクトルが、運動座標系で $\boldsymbol{r}$, 慣性座標系で $\boldsymbol{\rho}$ と表されるとしよう。微小時間 δt の間に、慣性中心が δR 移動し、剛体は O を通る $\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 向きの軸のまわりに $\delta\varphi$ だけ回転したとする。

(1) このとき、$\boldsymbol{\rho}$ の変化をベクトル $\delta\boldsymbol{R}, \delta\boldsymbol{\varphi}(\equiv \delta\varphi\delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}), \boldsymbol{r}$ を用いて表し、剛体の回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とすると、$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ となることを示せ。$\boldsymbol{V} \equiv \dot{\boldsymbol{R}}$ とする。

(2) 剛体が有限個の質点 (運動座標系での位置 $\boldsymbol{r}_\alpha$, 質量 m_α) からできているとみなし、剛体の運動エネルギー $T(\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{\Omega})$ が、全質量 M と慣性テンソル $I_{ik} \equiv \sum_\alpha m_\alpha(|\boldsymbol{r}_\alpha|^2\delta_{ik} - r_{\alpha,i}r_{\alpha,k})$ を用いて、

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha[\Omega^2|\boldsymbol{r}_\alpha|^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}_\alpha)^2] = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$

となることを示せ。I は運動座標系の (互いに垂直な) 軸の方向を適当に選べば対角化される。このような軸の方向を慣性主軸という。

(3) 対角化されたテンソルの成分 (主慣性モーメント) を I_1, I_2, I_3 として、$I_1 + I_2 \geq I_3$ を示せ。

[27] 慣性モーメントの計算 (moment of inertia)

(1) 次の物体の絵を描いて慣性主軸を記入し、主慣性モーメントを求めよ。特に指定がないものは、密度が一様で ρ とする。

(a) 長さ L の細い棒

(b) 半軸の長さ A, B, C の楕円体

(c) 1 辺 a の軽い正 3 角錐の各頂点に質量 m の質点が配置された物体

(d) 長さ L, 半径 R の円柱から、軸と平行に $R/2$ ずれた直線を軸とする長さ L, 半径 $r(\leq R/2)$ の円柱をくりぬいた物体

(2) 上記 (d) の物体が水平面上を転がっている。2 つの円柱の軸を含む平面と鉛直線のなす角度を ϕ とする。$\phi, \dot{\phi}$ を用いて、運動エネルギーを表せ。

[28] A rolling cone (**回転する円錐**)

Calculate the kinetic energy of a homogeneous cone with mass m, height h and top angle 2α, when it is rolling without slipping on a plane with the angular velocity ω_0.

homogeneous: 一様な, 均質な cone: 円錐 mass: 質量 top angle: 頂角 angular velocity: 角速度

[29] **オイラーのコマ** (Euler top)

無重力状態で回転している剛体の運動について考えよう。重心は静止しているものとし、剛体とともに回転する座標系を考える。3 つの座標軸を慣性主軸 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 方向にとる。

(1) この座標系で見た、外から加えたトルク $\boldsymbol{M}$ と、角運動量 $\boldsymbol{L}$ とその時間微分および、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ との関係を表すオイラーの運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$$

を示せ。

(2) 主慣性モーメントを $I_1 = I_2 < I_3$ とするとき、$\boldsymbol{L}$ の各成分は $L_i = I_i\omega_i (i = 1, 2, 3)$ を満たす。このことを用いて、$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ のときに運動方程式を解き、$\boldsymbol{\omega}$ を (適当な積分定数を用いて) 時刻 t の関数としてわかりやすく表せ。

(発展) [猫の宙返り] 人がネコの 4 本の足を持って腹が上に向くように (典型的には 1 m 弱) 持ち上げ、角運動量を与えることなくそっと手を離すと、ネコは空中で向きを変え、腹を下に向けて足で着地するという。角運動量が保存することに注意し、剛体の場合と比較しながら、この現象について考察せよ (実際の動物を危険にさらさないこと)。文献等を参考にした場合は、適切に引用せよ。

[30] **ホロノミックな拘束条件** (holonomic constraints)

(1) 力学系の拘束条件がホロノミックであるとはどういうことか、微分方程式を用いて説明せよ。

(2) ホロノミックな系, ホロノミックでない系の例をそれぞれ 3 個程度示し、簡潔に説明せよ。

[31] **輪から滑り落ちる質点** (point mass sliding off a ring)

重力加速度を g とする。半径 a の滑らかな薄い輪が、水平な床の上に鉛直に立てられ固定されている。頂上で静止していた質量 m の質点に、輪に沿って微小な初速度を与えたところ、質点は輪の外側を摩擦なく滑った後、ある点で輪から離れた。ラグランジュの運動方程式を用いて、この点の床からの高さを求めよ。

[32] **楔の上を滑り落ちる質点** (point mass sliding on a wedge)

重力加速度を g とする。質量 M, 傾角 α の楔 (くさび; 一定の傾角の坂道をもつ質量のある物体) が摩擦のない平面上に置かれている。時刻 $t = 0$ にこの楔の上に質量 m の質点を置いたところ、質点は楔の上を摩擦なく滑り落ちた。

(1) 運動の拘束条件をラグランジュ未定乗数法を用いて解析し、楔および質点の運動方程式を導け。

(2) 拘束力と楔の加速度を求め、拘束力が時刻 $t = T$ までにする仕事を求めよ。系の保存量は何か?

(3) 楔が固定されているときには、拘束力は質点に仕事をしないことを確かめよ。