2011 年度 解析力学 1 理論演習 (担当者: 手塚真樹) 課題 1

配布日: 2011 年 4 月 22 日　　最終更新: 2011 年 6 月 14 日

[1]　一般化座標による記述

質量 m の 2 つの質点が、質量を無視できる長さ $2l$ の棒の両端につながれている。棒の中点は、3 次元空間中の半径 a の円周上にある。この系の運動エネルギーを適当な一般化座標を用いて記述せよ。(ヒント: まず、棒の中点の位置を記述してみる。)

[2]　点変換

ある力学系 S が n 個の自由度をもち、座標 $q_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ で記述されるとする。S のラグランジアンを $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ で表す。座標に点変換を施し、別の新しい座標 $s_j(j = 1, 2, \ldots, n)$ で S を記述することを考える。q_i と s_j の関係は、点変換

$$q_j = q_j(s_1, s_2, \ldots, s_n, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

で与えられるとする。このとき、元の座標 q_i でのラグランジュ方程式から、新しい座標 s_j でのラグランジュ方程式が導かれることを示せ。

[3]　角運動量ベクトル, 極座標の利用

質量 m の質点が、ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = V(|\boldsymbol{r}|) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{L}$ に対応する力を受けて 3 次元空間内を動く。$\boldsymbol{a}$ は固定された定数ベクトルであり、$\boldsymbol{r}$ は質点の位置ベクトル、$\boldsymbol{L}$ は質点の角運動量ベクトルである。このとき、質点に働く力をデカルト座標で計算せよ。そして、極座標を用いて質点の運動方程式を求めよ。(ヒント: 極座標の偏角の基準となる方向は任意に選んでよい)

[4]　1 次元 2 体系の運動

1 次元 2 体系 (2 個の粒子の座標を x_1, x_2 とする) のラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{m\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - mKx_1x_2 \tag{2}$$

で与えられるとき、運動方程式を解いて、その運動を議論せよ。ただし $|K| < \omega_0^2$ とする。

[5]　振り子 (pendulum)

重力加速度を g とする。質量 m の質点が長さ l の軽い糸で定点から吊るされている。質点が一つの鉛直面内で運動するとしてこの系のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。また、振り子の周期 T を、鉛直方向からの振れ角度 φ の最大値 φ_0 を用いて表せ。必要なら、第一種楕円関数

$$K(x) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}} \tag{3}$$

を用いよ。さらに、結果を $\varphi_0 \ll 1$ として冪級数展開し、T の最初の 2 項 (φ_0^2 の項まで) を求めよ。

[6] 一様な棒

重力加速度を g とする。太さの無視できる質量 m の一様な棒 (長さ $2l$) の一端が、定点に固定されている。棒が一つの鉛直面内を運動するとき、この系のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。また、前問と同様に、振り子の周期を、鉛直方向からの振れ角度 φ の最大値 φ_0 を用いて表して、冪級数で展開した最初の 2 項 (φ_0^2 の項まで) を求めよ。

さらに、人が乗ったブランコ (踏み板および鎖の質量を無視する) の周期が、支点から人の重心までの距離のロープで人の体重に等しい質点を吊った単振り子の周期と比べてどうなるかについて、考察せよ。ブランコをこぐ動作との関連について述べよ。

[7] 球面振り子 (spherical pendulum)

重力加速度を g とする。質量の無視できる長さ l の糸に吊るされた質量 m の質点が、糸の張った状態で、3 次元空間中を運動する。極座標およびデカルト座標により、系のラグランジアンとラグランジュの運動方程式を求めよ。

[8] 2 重振り子 (double pendulum)

重力加速度を g とする。定点から長さ l_1 の糸で質量 m_1 の質点 A を、A から長さ l_2 の糸で質量 m_2 の質点 B を吊った。糸の質量は無視できる。A, B が共通の鉛直面内で糸の張った状態で運動するとき、この 2 重振り子に対するラグランジアンとラグランジュの運動方程式を求めよ。

[9] 冪ポテンシャル中での振動運動 (oscillation in a power-law potential)

ポテンシャルが $V(x) = A|x|^n$ で与えられる 1 次元系で振動する質量 m の粒子について、振動の周期をエネルギー E を用いて表せ。(ヒント: ベータ関数は $\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$ を満たす x, y に対して

$$B(x,y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{4}$$

で定義され、

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{5}$$

を満たす。)

[10] Morse ポテンシャル下での振動運動の周期

ポテンシャルが $V(x) = a(e^{-2x} - 2e^{-x})$ で与えられる 1 次元系で、エネルギー E が $-a < E < 0$ を満たす粒子の運動を考える。ポテンシャルの概形を調べて、振動運動することを示せ。また、運動方程式を解き、振動の周期を求めよ。

[11] Noether の定理 (Noether's theorem; Amalie Emmy Noether (1882–1935))

系の座標 $q_i(t)$ に対して、$\{q_i\}, \{\dot{q}_j\}, t$ の関数 S と 微小なパラメータ ϵ について点変換

$$q_i(t) \to q_i(t) + \epsilon S_i(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \tag{6}$$

を考える。この変換でラグランジアンが不変なとき、

$$I(t) \equiv \sum_i \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} S_i(q, \dot{q}, t) \tag{7}$$

は時間に依らないことを示せ。並進対称性 (任意の定ベクトル $\boldsymbol{r}$ について、各位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $x_\alpha \to q_\alpha + r_\alpha$ としたときに理論が不変) がある力学系の場合は何がわかるか。また、ラグランジアンが時間に陽によらない ($L = L(q_i, \dot{q}_i)$ と書ける) 場合に、時間並進 $t \to t + \epsilon$ を考え、ハミルトニアン

$$H \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{8}$$

が時間に依らないことを示せ。

[12] Laplace-Runge-Lenz ベクトル

中心力ポテンシャル $V(r)$ 中を運動する質量 m の質点のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \qquad (r \equiv |\boldsymbol{r}|) \tag{9}$$

で与えられる。ただし、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とした。運動量を $\boldsymbol{p}(\equiv m\dot{\boldsymbol{r}})$ と書く。

1. $\boldsymbol{\epsilon}$ を定数ベクトルとして、微小変換 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r}$ に対するラグランジアンの変化を調べ、角運動量 $\boldsymbol{L}(\equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ が保存量であることを示せ。
2. 微小変換 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{\epsilon} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}$ に対するラグランジアンの変化分が
$$\delta L = r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{r}}{r} \right) \tag{10}$$
で与えられることを示せ。
3. 逆 2 乗則に従う力 (定数 k があって $-\partial V/\partial r = kr^{-2}$ と書ける) の場合、上の δL が時間の全微分となることを確かめよ。Noether の定理を用いて、上記の変換に対応した保存量が $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} + mk\boldsymbol{r}/r$ で与えられることを示せ。

[13] 回転面の面積 (the area of a surface of revolution)

xy 平面上の 2 点 (x_1, y_1) および (x_2, y_2) を端点とする曲線 L を y 軸の周りに回転して曲面を作る。$y_1 < y_2$ とする。x_1, x_2 が同じ符号を持つとき、L が任意の x 軸と平行な直線と高々 1 点を共有すると仮定して、変分原理により、曲面の面積が極小となる条件を調べよ。そして、適当な数の積分定数を用いて、L を表す式を与えよ。このような L が必ず存在するかどうか、また、 L がいくつか存在するとき、そのいずれかはこのような回転面として面積が最小のものとなるかどうかについて考察せよ。(ヒント: $x = \cosh y \equiv (e^y + e^{-y})/2$ のとき、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = \sinh y \equiv (e^y - e^{-y})/2$ であり、一般の y に対し $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ である。))

[14]　**測地線と大円** (geodesics and great circles)

単位球面上の 2 点 A, B を球面に沿って結ぶ最も短い曲線が、A, B における球面の法線を含む 2 次元平面と球との交わり (この円を大円という) の弧 (のうち長くない方) となることを、変分原理を用いて示せ。また、A, B の緯度 (latitude) と経度 (longitude) をそれぞれ $(\phi_{\rm A}, \lambda_{\rm A})$ および $(\phi_{\rm B}, \lambda_{\rm B})$ とするとき、測地線の長さを求めよ ($-\pi/2 \leq \phi_{\rm A}, \phi_{\rm B} \leq \pi/2$; $-\pi \leq \lambda_{\rm A}, \lambda_{\rm B} \leq \pi$ とする)。京都大学 (北緯 35.03 度, 東経 135.78 度) からクンバコナム (北緯 10.96 度, 東経 79.39 度) までの距離はどのくらいか。角度はどの向きになるか。(地球を赤道の長さ 4.0×10^4 km の球体と近似してよい)

[15]　**最速降下曲線** (brachistochrone curve)

一様な重力場 (重力加速度 g) 中で、原点に静止していた質量 m の粒子が、ある傾斜に沿って (摩擦はないものとする) 点 A まで落ちる。降下にかかる時間が最も小さくなるような傾斜を表す曲線を、変分原理により求めよ (原点と点 A を含む 2 次元平面を水平方向を x 軸, 鉛直下向きを y 軸にとり、直交する z 軸を考える)。曲線がサイクロイド (cycloid) で与えられることを示せ。

[16]　**ラグランジュ未定乗数法** (the method of Lagrange multipliers)

$k < n$ とする。ランク k の $k \times n$ 行列 A_{li} について、k 個の (独立な) 拘束条件

$$\sum_{i=1}^{n} A_{li}\delta x_i = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{11}$$

を満たす任意の n 個の変分 $\delta x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を考える。これらが常に

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \delta x_i = 0 \tag{12}$$

という条件を満たす必要十分条件は、ある $\lambda_l (l = 1, 2, \ldots, k)$ が存在して

$$X_i = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l A_{li} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

となることであることを証明せよ。