[16] と第 2 回配布分の訂正・補足 (訂正後の問題全文を載せます)

[16]　ラグランジュ未定乗数法 (the method of Lagrange multipliers)

$k < n$ とする。ランク k の $k \times n$ 行列 A_{li} について、k 個の (独立な) 拘束条件

$$\sum_{i=1}^{n} A_{li}\delta x_i = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{11}$$

を満たす任意の n 個の変分 $\delta x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ を考える。これらが常に

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \delta x_i = 0 \tag{12}$$

という条件を満たす必要十分条件は、ある $\lambda_l (l = 1, 2, \ldots, k)$ が存在して

$$X_i = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l A_{li} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

となることであることを証明せよ。

[18]　回転する座標系 (rotating reference frame)

静止座標系と、それと原点を共有し相対角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する座標系で質点の運動を観測する。位置 $\boldsymbol{r}$ のとき、速度と加速度は、静止座標系で $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, 回転座標系で $(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{a}')$ となった。ただし、回転座標系でのベクトルの時間微分は、回転座標系で (x_1', x_2', x_3') と表されるベクトル $\boldsymbol{x}$ について、回転座標系の基底ベクトルを ${\boldsymbol{e}'}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ として、

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)' \equiv \sum_j \dot{x}_j' {\boldsymbol{e}'}_j$$

で定義され、この意味で $\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{r}$ の、 $\boldsymbol{a}'$ は $\boldsymbol{v}'$ の、回転座標系での時間微分である。

(1) $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}$ を用いて表せ。

(2) $\boldsymbol{a}$ を $\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{r}$ などのうち必要なものを用いて表し、各項の意味を説明せよ。

(3) 一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ について、$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ と $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)'$ の関係を求めよ。

[22]　空気抵抗 (air drag)

鉛直上向きに y 軸, 水平方向に x 軸をとり、2 次元平面内の質点の運動を考える。原点から斜め上に投げられた質量 m の質点が、重力加速度 g および空気抵抗力 F を受けて運動する。F は速さ (速度 $\boldsymbol{v}$ の絶対値) v にのみ依存すると仮定し、$F(v) = mgf(v)$ と表す。

(1) $\boldsymbol{v}$ と x 軸のなす角を θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とする。一般の $f(v)$ について、次のホドグラフ (hodograph) 方程式が成り立つことを示せ。(軌跡が上に凸であることに注意し、軌跡に沿った方向と軌跡に垂直な方向について運動方程式をたてるとよい。軌跡に沿った長さを s とする。)

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin\theta + f(v)}{\cos\theta}.$$

(2) 最初の投射角を θ_0 として、(x, y, t) を、それぞれ θ に関する定積分の形に表せ。

(3) $f(v) = b/v$ (b は定数) の場合に、v を θ を用いて表せ。 より一般に、 $f(v) = \alpha v^n$ と書ける場合、ホドグラフ方程式は解けるか。

[25]　クーロン型の中心力ポテンシャルなどによる散乱 (Scattering by central forces including a Coulomb-type one)

中心力ポテンシャル $V(r) = K/r, U(r) = k/r^2$ による散乱を調べよ。エネルギーが E のとき、微分断面積 $\sigma(\Theta)$ はそれぞれどうなるか。

[26]　慣性テンソル (tensor of inertia)

3 次元空間での剛体の運動を考えよう。慣性座標系 (実験室系) XYZ で $\boldsymbol{R}$ の位置に慣性中心 O がある剛体について、$\boldsymbol{R}$ を原点とし、剛体とともに運動する運動座標系 xyz を考える。剛体上の点 P の位置ベクトルが、運動座標系で $\boldsymbol{r}$, 慣性座標系で $\boldsymbol{\rho}$ と表されるとしよう。微小時間 δt の間に、慣性中心が δR 移動し、剛体は O を通る $\hat{\delta\boldsymbol{\varphi}}$ 向きの軸のまわりに $\delta\varphi$ だけ回転したとする。

(1) このとき、 $\boldsymbol{\rho}$ の変化をベクトル $\delta\boldsymbol{R}, \delta\boldsymbol{\varphi}(\equiv \delta\varphi\hat{\delta\boldsymbol{\varphi}}), \boldsymbol{r}$ を用いて表し、剛体の回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とすると、$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ となることを示せ。$\boldsymbol{V} \equiv \dot{\boldsymbol{R}}$ とする。

(2) 剛体が有限個の質点 (運動座標系での位置 $\boldsymbol{r}_\alpha$, 質量 m_α) からできているとみなし、剛体の運動エネルギー $T(\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{\Omega})$ が、全質量 M と慣性テンソル $I_{ik} \equiv \sum_\alpha m_\alpha(|\boldsymbol{r}_\alpha|^2\delta_{ik} - r_{\alpha,i}r_{\alpha,k})$ を用いて、

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha[\Omega^2|\boldsymbol{r}_\alpha|^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}_\alpha)^2] = \frac{mV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$$

となることを示せ。I は運動座標系の (互いに垂直な) 軸の方向を適当に選べば対角化される。このような軸の方向を慣性主軸という。

(3) 対角化されたテンソルの成分 (主慣性モーメント) を I_1, I_2, I_3 として、$I_1 + I_2 \geq I_3$ を示せ。