第 1 回配布分の訂正・補足 (改訂済の問題全文を載せます)

[5]　振り子 (pendulum) ($\varphi \ll 1$ ではなく $\varphi_0 \ll 1$ として冪級数展開します)

重力加速度を g とする。質量 m の質点が長さ l の軽い糸で定点から吊るされている。質点が一つの鉛直面内で運動するとしてこの系のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。また、振り子の周期 T を、鉛直方向からの振れ角度 φ の最大値 φ_0 を用いて表せ。必要なら、第一種楕円関数 $K(x) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$ を用いよ。さらに、結果を $\varphi_0 \ll 1$ として冪級数展開し、T の最初の 2 項 (φ_0^2 の項まで) を求めよ。

[6]　一様な棒 (棒の長さを $2l$ とし、周期を φ_0^2 の項まで求めます)

重力加速度を g とする。太さの無視できる質量 m の一様な棒 (長さ $2l$) の一端が、定点に固定されている。棒が一つの鉛直面内を運動するとき、この系のラグランジアンを書き、運動方程式を求めよ。また、前問と同様に、振り子の周期を、鉛直方向からの振れ角度 φ の最大値 φ_0 を用いて表して、冪級数で展開した最初の 2 項 (φ_0^2 の項まで) を求めよ。

さらに、人が乗ったブランコ (踏み板および鎖の質量を無視する) の周期が、支点から人の重心までの距離のロープで人の体重に等しい質点を吊った単振り子の周期と比べてどうなるかについて、考察せよ。ブランコをこぐ動作との関連について述べよ。

[9]　冪ポテンシャル中での振動運動 (oscillation in a power-law potential) ($\mathrm{d}t$ を追加)

ポテンシャルが $V(x) = A|x|^n$ で与えられる 1 次元系で振動する質量 m の粒子について、振動の周期をエネルギー E を用いて表せ。(ヒント: ベータ関数は $\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$ を満たす x, y に対して

$$B(x,y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

で定義され、$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ を満たす。)

[12]　Laplace-Runge-Lenz ベクトル (2. の微小変換と δL の符号は変更しない)

中心力ポテンシャル $V(r)$ 中を運動する質量 m の質点のラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \qquad (r \equiv |\boldsymbol{r}|)$$

で与えられる。ただし、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とした。運動量を $\boldsymbol{p}(\equiv m\dot{\boldsymbol{r}})$ と書く。

1. $\boldsymbol{\epsilon}$ を定数ベクトルとして、微小変換 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r}$ に対するラグランジアンの変化を調べ、角運動量 $\boldsymbol{L}(\equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$ が保存量であることを示せ。
2. <u>(この系で実現する運動について)</u> 微小変換 <u>$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{\epsilon} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}$</u> に対するラグランジアンの変化分が

$$\underline{\delta L = r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{r}}{r}\right)}$$

   で与えられることを示せ <u>(オイラー・ラグランジュ方程式により $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を消去せよ)</u>。
3. 逆 2 乗則に従う力 (定数 k があって $-\partial V/\partial r = kr^{-2}$ と書ける) の場合、上の δL が時間の全微分となることを確かめよ。Noether の定理を用いて、上記の変換に対応した保存量が $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} + mk\boldsymbol{r}/r$ で与えられることを示せ。