

量子臨界点近傍の超伝導

京都大学理学研究科 多田 靖啓

1 はじめに

重い電子系において、しばしば、磁気秩序相のすぐ近くに超伝導相が存在する場合がある [1, 2, 3, 4]。たとえば、 $\text{CeCu}_2(\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x)_2$ や CeMIn_5 ($M=\text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$) などでは反強磁性相、 UGe_2 や URhGe などでは強磁性相の近傍に超伝導が見つかっている。いずれの場合も、超伝導と磁性を担う電子は同一の電子であると考えられており、この二つの相の関係性は古くから研究されてきた。とくに、それぞれの相は、圧力や元素置換、あるいは外場などの系のチューニングパラメータ δ によってコントロールされ、そのパラメータがある臨界的な値 δ_c となると、転移温度は絶対零度になる。このような絶対零度における基底状態の相転移を、量子相転移という [5]。一般には量子相転移の次数は系の詳細に依存するが、とくに転移が2次の場合には絶対零度においてさえ「量子的な揺らぎ」が存在し、そのために有限温度においても物理量に特異な振る舞いが観測されるようになる。このような2次量子相転移を起こす絶対零度の転移点を、量子臨界点という。また、この量子臨界点近傍の物理量の特異性は、そこにおいて系が通常の Fermi 液体とは異なる状態であることを示している。このような、重い電子系でしばしば議論される量子的磁気揺らぎに関連した「非 Fermi 液体」は、高温超伝導体や有機導体でも観測されており、量子臨界現象としてのユニバーサルな側面であると考えられている [6, 7, 8]。そして、超伝導は、その非 Fermi 液体的振る舞いを示す領域のすぐ近くで発見されることが多く、量子臨界点が超伝導の発現に対しても重要なはたらきをしているのではないかという自然な発想につながってゆく。現在では、「磁気揺らぎが誘起する超伝導」という一つの枠組みが認識されるようになっている。

そこで本講義では、磁氣的量子臨界点近傍に超伝導が存在しているような系について、基本的な事柄を解説する。本講義では、まず、量子相転移の概念について解説し、古典的相転移と異なる点やなぜ量子相転移が重要となるのかについて議論する。次に超伝導の基本的な事柄を解説し、磁性と超伝導の関係についても考察する。最後にいくつかの具体的な現象を解説し、これによって量子臨界性に関する理解を深めたい。

2 量子臨界点近傍の物性

このセクションでは、量子相転移の一般的な性質について議論する。話を具体的にするために、以下では古くから研究されている磁気量子臨界点についてのみ扱うが、そこで展開されるいくつかの概念は他のタイプの量子相転移にも通用するものである。

図1はそれぞれ、 CeIn_3 [9]、 $\text{UCu}_{5-x}\text{Pd}_x$ [10]、 $\text{CeCu}_{5.2}\text{Ag}_{0.8}$ [11] の相図である。これらの相図では横軸が、圧力・元素置換率・磁場であるが、いずれの外部パラメータも、磁気秩序をコントロールするはたらきがある。この「系の状態をチューニングする」という性格だけに着目すると、圧力であれ元素置換であれ磁場であれ、チューニングパラメータ δ という幾分抽象的な量を導入することでまとめて考えることができる。すると図1は、超伝導相を無視して磁気秩序とそれによる量子臨界性にのみ注目した場合、図2のような一般的な相図として理解することができる。これは、超伝導の可能性を考慮をしない場合の磁気量子相転移の典型的な相図である。(超伝導がある場合の量子相転移の相図に関しては、完全な分類ができていないわけではない。) 以下で、この相図について解説する。

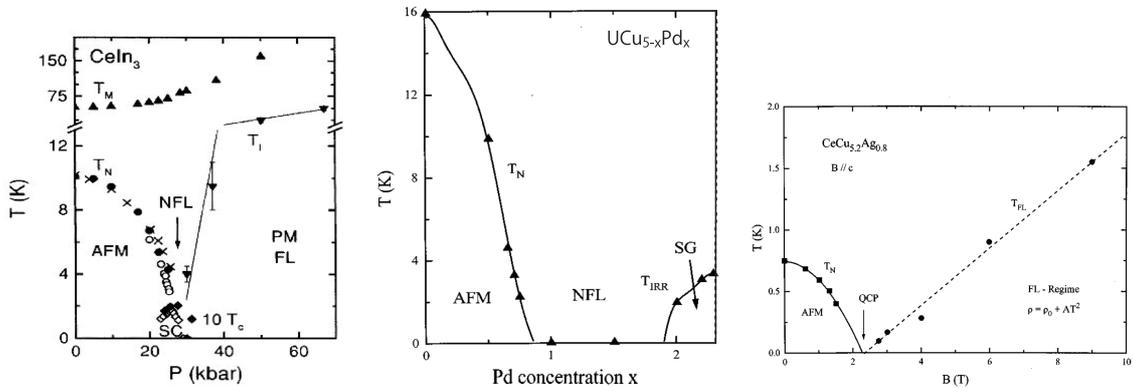


図 1: (左)CeIn₃[9]、(中央)UCu_{5-x}Pd_x[10]、(右)CeCu_{5.2}Au_{0.8} の相図 [11]。

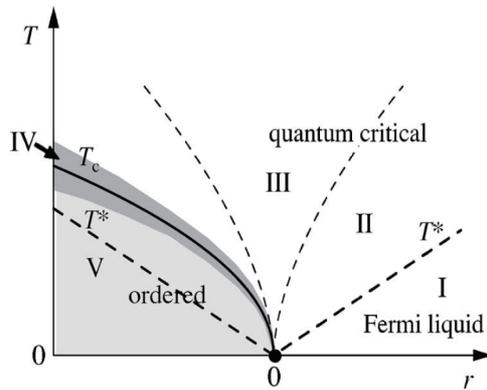


図 2: 磁気量子臨界点近傍の典型的な相図。縦軸は温度 T 、横軸はコントロールパラメータ r 。(I) はカノニカル・フェルミ液体領域、(II) はクロスオーバー領域、(III) は異常フェルミ液体領域、(IV) は熱的臨界領域、(V) は磁気秩序相 [6]。これらの用語は次のセクションで説明される。

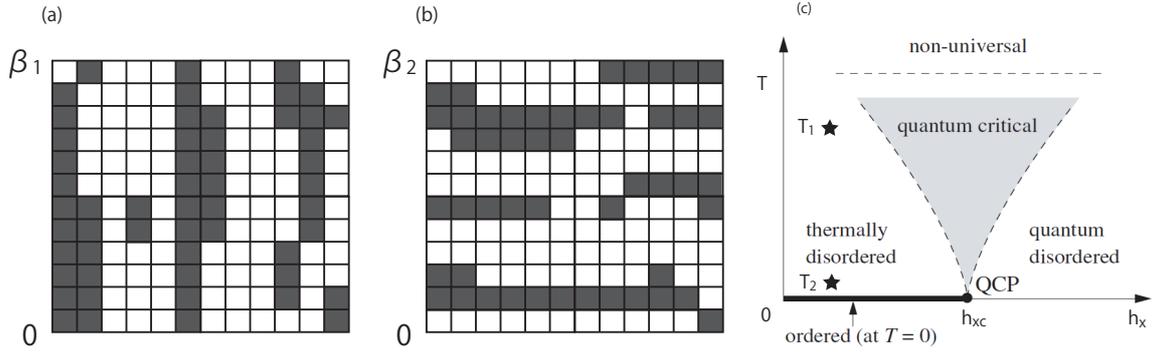


図 3: (a),(b) 空間・虚時間的なスピン配位の揺らぎ。横軸が空間で、縦軸が虚時間。 $S^z = +1$ 、 $S^z = -1$ に対応している。(a) 温度がある程度高い ($\beta_1 = 1/T_1$) 場合。(b) 温度が十分低い ($\beta_2 = 1/T_2$) 場合。 $\beta_1 \ll \beta_2 \sim \infty$ である。(c) 一次元横磁場イジングモデルの相図 [13]。印の温度 T_1 は図 (a)、温度 T_2 は図 (b) にそれぞれ対応する。

2.1 熱揺らぎと量子揺らぎ

このセクションでは、熱揺らぎと量子揺らぎという二つのタイプのスピン揺らぎについてについて議論する。通常、揺らぎの尺度としては帯磁率 $\chi^{\mu\mu}(x,t) \sim \langle S^\mu(x,t)S^\mu(0,0) \rangle$ が用いられるが、これは原点 $(0,0)$ から空間・時間的に離れた点 (x,t) にある $S^\mu(x,t)$ がどれくらい $S^\mu(0,0)$ のことを「知っているか」を測る量である。そのため、その情報の到達距離である相関長 ξ が急激に成長するときに、秩序ベクトル Q に対して静的帯磁率 $\chi(Q,0) = \chi_Q$ が発散的に増大するのである。

熱揺らぎは有限温度の相転移に伴って現れる揺らぎのことである。この揺らぎは、系の熱力学的状态を表す確率密度 $p(n) = e^{-\beta E_n}/Z$ (Gibbs 測度) が有限の $\beta = 1/T$ のために、常磁性状態と磁気秩序状態のまわりにおいて適当に分布しているために起きる。このような熱力学状態の揺らぎは古典系でも存在するため、磁気秩序の熱揺らぎの性質そのものは量子力学とは関係ない。(ただし、磁気秩序のマイクロな起源であるスピンは量子力学的である。)

一方、量子揺らぎは絶対零度でも存在する、物理量の非可換性からくる量子力学的な揺らぎである。たとえば、横方向 (x 方向) に磁場のかかった 1 次元スピン系のモデル (横磁場 Ising モデル [5, 12])

$$H = - \sum_i J S_i^z S_{i+1}^z - h_x \sum_i S_i^x, \quad J > 0 \quad (1)$$

でいえば、 $[S_i^z, S_i^x] \neq 0$ で、スピンの h_x で x 方向に向けられようとするために、 S^z の値が $1/2$ より小さくなることに対応している。この揺らぎを理解するために、「虚時間 τ 」という時間を導入すると、量子揺らぎは虚時間 τ 方向に関する揺らぎであるとならえることができる^{1, 2}。空間的なスピン揺らぎは、虚時間一定のスナップショットで様々な i について S_i をみれば揺らぎの様子が分かる。一方、虚時間的なスピン揺らぎは、同一の空間点 i にあるスピン $S_i(\tau)$ を様々な τ で比較することにより、揺らぎの様子がみえてくる。図 3 は、横軸が空間軸、縦軸が虚時間軸でスピン配位を示したものである。(a) は温度が高く量子揺らぎが効いていない場合で、(b) は温度が低く量子揺らぎが大きい場合である。(a) では、空間方向に相関長 ξ が伸びてスピンの空間的に秩序化しようとしている。(b) では、虚時間方向の「相関時間 ξ_τ 」が系の虚時間サイズ $\beta = 1/T$ より小さいために、 τ 方向に揺らいている。また、しばしば、虚時間 τ を Fourier 変

¹虚時間というものは実際の時間ではないのだが、実時間と「解析接続」で対応がつかために、しばしば実時間と似たようなものと解釈される。たとえば、Schrödinger 方程式 $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi$ は、形式的に $it \rightarrow \tau$ と「解析接続」してしまえば、 $(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\nabla^2}{2m})\psi = 0$ という拡散方程式になる。このとき $\psi(\tau, \mathbf{x})$ は、虚時間 τ と空間 \mathbf{x} を変数にした粒子の拡散運動を記述することになる。

²もちろん、物理量の非可換性によって空間方向にもスピンは揺らぐ。しかし虚時間方向への揺らぎは、量子揺らぎを考える際に自然に現れる量であるという意味において、量子揺らぎ特有のものである。このことは、熱揺らぎに現れる実時間依存性と、量子揺らぎの虚時間依存性を概念的に区別するものである。

換した「松原周波数 ω_n 」に関する揺らぎも、量子揺らぎとよばれる。このように量子揺らぎは、虚時間という概念を導入することにより、ある意味、直感的・視覚的に理解することができる。

量子揺らぎの別の説明として、量子揺らぎを、「基底状態の急激な変化」と関連して理解することもできる。上記のスピモデルにおいては、 h_x を 0 から大きくしてゆくと、 $h_x > h_{xc}$ で、基底状態 $|\Psi\rangle$ は $\langle S_i^z \rangle = 0$ の状態になる。つまり、系の状態は非可換な二つの物理量の相対的な強さを表すパラメータ $g = h_x/J$ によって、 $0 \leq g < h_{xc}/J \equiv g_c$ なら $\langle S_z \rangle \neq 0$ の相、 $g_c < g$ なら $\langle S_z \rangle = 0$ の相であると特徴付けられる。したがって、基底状態を g に依存しない基底で $|\Psi(g)\rangle = \sum_i c_i(g)|i\rangle$ と展開したときには、その係数 $\{c_i(g)\}_i$ は $g \simeq g_c$ で大きく変化する。これは、非可換物理量の競合によって基底状態が相転移することに付随する揺らぎであり、 $S_i(\tau)$ の虚時間方向への揺らぎと起源は同じである。この意味で係数 $\{c_i(g)\}$ の揺らぎも量子揺らぎである。

このセクションのまとめ

- 揺らぎには二種類あり、一つは熱揺らぎで、もう一つは量子揺らぎである。
- 熱揺らぎは、統計力学的状態が有限温度の効果によって、磁気秩序状態と常磁性状態との間に適当に分布することによって起こる。この揺らぎは空間方向に起こる。
- 量子揺らぎは物理量の非可換性を起源とし、虚時間方向への揺らぎとして解釈される。しばしば、虚時間を Fourier 変換した松原周波数への依存性を、量子揺らぎとよぶことが多い。

2.2 量子相転移の相図の概略

[フェルミ液体]

ここでは、量子相転移の典型的な相図 2 について解説を行う。そのために、まず、「フェルミ液体」という概念を明確にしておこう。フェルミ液体はしばしば、実験的には電気抵抗が $\rho \sim T^2$ 、比熱が $C \sim T$ のようになっている状態、理論的には準粒子の寿命が $\tau_{qp} \sim T^{-2}$ となる状態であると説明されることが多い。しかし、これはフェルミ液体の正確な定義ではない。

フェルミ液体状態とは、端的にいえば、「準粒子がよく定義された熱力学的状態」のことである。ここで「準粒子」とは、寿命 τ_{qp} が十分長く、系が熱的に乱される時間スケール $\tau_{\text{thermal}} \sim T^{-1}$ より短い時間スケールでは、その粒子としての性質を保持し続けられる状態（個別励起モード）のことを指す。この準粒子は、相互作用のない系のよい量子数である波数を、よい量子数としてもっている。絶対零度で準粒子が定義されることは、運動量分布関数 n_k のとび z_k が $z_k \neq 0$ であることと同じであり、 $z_k \neq 0$ であることがフェルミ面を明確に特徴付けるのである [14]。つまり、絶対零度で準粒子が存在するという事は、フェルミ面が明確に存在する ($z_k \neq 0$) という事と同じである。³ $\tau_{qp} \gg \tau_{\text{thermal}}$ は、 $z_k \neq 0$ であるための条件となっている。また、 $\tau_{qp} \gg \tau_{\text{thermal}}$ は、励起のエネルギー・スペクトルという視点からは、エネルギー ε_{qp} のピークの線幅 Γ_{qp} が熱分布によるぼやけ $\Gamma_{\text{thermal}} \sim T$ より十分小さい ($\Gamma_{qp} \ll \Gamma_{\text{thermal}}$) ことであると解釈される。注意すべきことは、これらの説明の中で、どこにも $\tau_{qp} \sim T^{-2}$ であることは要求されていないということである。したがって、たとえば、3次元反強磁性揺らぎによって寿命が縮んだ $\tau_{qp} \sim T^{-3/2}$ の場合も十分低温では $\tau_{qp} \gg \tau_{\text{thermal}}$ となるので、フェルミ液体状態である。本稿では、 $\tau_{qp} \sim T^{-2}$ となる状態を「カノニカル・フェルミ液体」とよび、 $\tau_{qp} \sim T^{-2}$ からずれてはいるが $\tau_{qp} \gg \tau_{\text{thermal}}$ である状態を「異常フェルミ液体」とよぶことにする。どちらの状態もフェルミ液体である。ただし、2次元反強磁性揺らぎの場合には $\tau_{qp} \sim T^{-1}$ であり、準粒子は τ_{thermal} と同じ程度の寿命しかもたない。この状態は準粒子がよく定義されているのか微妙な状態であり、marginal フェルミ液体

³このことは1次元系の Tomonaga-Luttinger(TL) 液体と比べると、より明瞭に理解できる。TL 液体では個別励起の寿命は τ_{thermal} より短く、準粒子は存在できなくなる。そのため、運動量分布関数 n_k は絶対零度でも滑らかな関数で、 n_k のとびで判断できるような明確なフェルミ面をもたない。

とよばれている [15]。⁴

以上をまとめると次のようになる。

フェルミ液体 (I)

- フェルミ液体とは、準粒子がよく定義されている状態である。
- 準粒子とは、波数をよい量子数としてもち、その寿命 τ_{qp} が、熱揺らぎで状態が乱される時間 $\tau_{\text{thermal}} \sim T^{-1}$ より十分長い個別励起のことである。
- フェルミ液体状態に対しては、フェルミ面がよく定義される。
- $\tau_{qp} \sim T^{-2}$ は、 $\tau_{qp} \gg \tau_{\text{thermal}}$ であるための必要条件ではない。

このようなフェルミ液体の性質の基礎になっている考え方が、「断熱接続」である。ここで、「相互作用のない系の状態と、ある熱力学的状態 A が断熱的に接続される」とは、「相互作用のない系にゆっくりと相互作用を印加してゆくと、系の熱力学関数が特異な振る舞いを示さず、滑らかに状態 A になる」ということである。相転移がある場合には、相互作用を印加してゆく途中で熱力学関数が異常をもち、断熱接続できないことになる。準粒子の形成は、断熱接続の考えによって理解される。つまり相互作用のない系での波数 k をもった 1 粒子状態 $c_k^\dagger|0\rangle$ が、断熱接続によって、同じ量子数 k をもつ新しい 1 粒子状態 $|Q_k\rangle = Q_k^\dagger|0\rangle$ につながると理解できるのである [16]。⁵ もし $Q_k^\dagger|0\rangle$ が、系が熱的に乱される時間 τ_{thermal} より十分長い寿命 τ_{qp} をもっていれば、 $\tau_{\text{thermal}} \ll \tau_0 \ll \tau_{qp}$ という時間スケール τ_0 が存在できる。この時間スケールの範囲では、 $Q_k^\dagger|0\rangle$ がよい量子状態であるというわけである。セクション 3 で議論するように、この準粒子は量子臨界点近傍でも適当に寿命をもつために、超伝導の Cooper ペアをつくることのできるものである。

したがって、整理すると、フェルミ液体は次の二点によって基礎づけられる。

フェルミ液体 (II)

- フェルミ液体状態は、断熱接続によって、相互作用のない系からつながっている。
- フェルミ液体状態を特徴付ける励起は、相互作用のない系の 1 粒子状態から滑らかにつながる準粒子であり、その寿命は τ_{thermal} より長い。

この二つが、系がフェルミ液体状態であることの条件である。上で四角で囲った「フェルミ液体 (I)」と、この条件は本質的には同じものであり、「フェルミ液体 (II)」は断熱接続という概念で整理されたものである。

[量子相転移の相図]

フェルミ液体という概念を明確にしたので、相図 2 の説明を行おう。図の横軸 r は圧力・ドーピング・磁場などのコントロール可能なパラメータで、 T_c は (反) 強磁性転移温度、 T^* は系がカノニカル・フェルミ液体的となる典型的な温度である。 T^* より上の温度領域は異常フェルミ液体状態である (図では quantum critical とかかかれている)。前述の通り、カノニカル・フェルミ液体も異常フェルミ液体も両方ともフェルミ液体であり、この二つの領域はクロスオーバーでつながっている。⁶ パラメータ r を固定したまま温度 T を変化させて実現される相転移を熱的 (あるいは古典的) 相

⁴さらに複雑なのは、高温超伝導に関連した「擬ギャップ状態」である。擬ギャップ状態においては、大きな反強磁性揺らぎによって、 k 空間中のホットスポットとよばれる部分ではエネルギーギャップが開いており、フェルミ面はうまく定義できない。また、コールドスポットとよばれる部分ではギャップはなく、フェルミ面がよく定義されている。 k 空間の中の場合によって、準粒子が定義できたりできなかったりするのである。

⁵断熱的に相互作用を印加した状態に対して、断熱的に相互作用を消去するプロセスも考えられる。相互作用を印加した後に消去すれば、系はもとの状態に戻るはずである。したがって、 Q_k^\dagger はあるユニタリー演算子 U を用いて $Q_k^\dagger = U^{-1}c_k^\dagger U$ とかけるはずである。これは物理的に、 $Q_k^\dagger \sim \sqrt{z_k}c_k^\dagger + (c^\dagger c^\dagger c \text{ の項}) + (c^\dagger c^\dagger c^\dagger cc \text{ の項}) + \dots$ と展開できる。 $\langle 0|c_k^\dagger|Q_k\rangle = \sqrt{z_k}$ なので、 $|Q_k\rangle$ は z_k くらいの割合でもとの 1 電子状態を含み、その他に無数の電子・正孔励起をともなった状態であるといえる [16, 17]。ただし、相転移がある場合は U はきちんとは定義できなくなる。

⁶この図にはかかれていないが、 f 電子が局在的な状態から遍歴的な状態になる典型的な温度 T_{coh} も重い電子系では重要である。 T_{coh} は、不純物系における近藤温度 T_K に対応する温度で、その大きさは伝導電子数などの系の詳細に依存する [18, 19, 20]。本講義で念頭においている系は、 $T_{\text{coh}} \gg T_c, T^*$ になっていて、量子臨界点近傍の広い範囲で f 電子が遍歴的であるような系である。したがって、Doniach の相図 [21] のように、 f

転移 (thermal or classical phase transition) といひ、 T を (実験的には不可能であるが) $T = 0$ で固定して r を変化させて実現される相転移を量子相転移 (quantum phase transition) という。相転移が 2 次するとき、この絶対零度における相転移点を量子臨界点 (quantum critical point=QCP) とよぶ。

相図 2 においては、QCP から r, T のどちらの方向に離れているかによって、系の状態は異なっている。これは先に述べた、熱揺らぎと量子揺らぎのどちらが支配的になるかによっている。熱的相転移では揺らぎの長さのスケールである相関長 $\xi \sim |r|^{-\nu}$ が系の臨界性と関係していたが、量子相転移ではもう一つ、揺らぎのダイナミクスの (虚) 時間スケール $\xi_\tau \sim \xi^z \sim |r|^{-z\nu}$ が重要となる。揺らぎは空間的には ξ の長さで変化し、時間的には ξ_τ の長さをスケールにして変調する。ここで z は動的臨界指数 (dynamical exponent) とよばれ、波数が $q \rightarrow q' = bq$ とスケール変換されるときに、(松原) 周波数が $\omega \rightarrow \omega' = b^z \omega$ と変換されることを表しており、空間軸と時間軸が一般には同等でないことに対応している。量子揺らぎがどれくらい重要になってくるかは、系の虚時間サイズ $L_\tau = \hbar\beta$ と ξ_τ の大きさの比に依存し、 r - T 相図はいくつかの領域に分かれる。あるいは同じことであるが、揺らぎの特徴的エネルギースケール ω^* と温度 T の大きさによって分かれる。

- (I) カノニカル・フェルミ液体 (CFL) 領域。十分低温で $\xi_\tau \ll L_\tau (\omega^* \gg T)$ かつ $r > 0$ のときは、熱揺らぎではなく量子揺らぎが支配的となり、揺らぎの振る舞いは QCP からの $T = 0$ における距離 r によって決められる。 $T = 0$ では常にこの条件がみたされるため、 $T_c = 0$ の相転移は特別であるといえる。この領域では、系の性質は基本的には $T = 0$ の基底状態と似たものになっており、カノニカル・フェルミ液体の性質を示す (オーダーパラメータによる議論では、quantum disordered phase とよばれている)。
- (II) クロスオーバー領域、(III) 異常フェルミ液体 (AFL) 領域。 $\xi_\tau \gg L_\tau (\omega^* \ll T)$ のときは、温度 T が揺らぎに対するカットオフとなり系の振る舞いを決定する。この領域では、 $T = 0$ から温度を上げてゆくと、量子揺らぎが有限温度によって抑えられる「前に」その影響を受ける (このことは繰り込み群方程式に見てとれる)。そのため、(I) での状態と異なり、QCP での臨界的な基底状態の性質を引き継いだ状態が現れる。その結果、領域 (III) では物理量に特徴的な温度依存性が、領域 (II) ではカノニカル・フェルミ液体領域 (I) からのクロスオーバーが見られる。しばしば、(III) は量子臨界領域 (quantum critical region) とよばれる。
- (IV) 熱的臨界領域 (thermal critical region)。ここは量子相転移とは直接関係しない、熱揺らぎが大きい領域である。この領域は $r \nearrow 0, T_c \searrow 0$ にもなって小さくなり、 $T_c = 0$ の極限では QCP の一点に収束する。
- (V) 磁気秩序相。

以上のように、QCP が存在する場合の相図は多彩で、熱揺らぎと量子揺らぎの両方があるために様々な状態が現れる。その中でも最も注目を集めているのが、異常フェルミ液体領域である。この領域では、系の次元や、揺らぎが反強磁性的か強磁性的かにも依存した状態が現れる。

このセクションのまとめ

- 絶対零度の相転移を量子相転移という。とくに転移が 2 次ときは、その点を量子臨界点という。
- r - T 相図は、古典揺らぎ・量子揺らぎの強さによって、(I) カノニカル・フェルミ液体領域、(II) クロスオーバー領域、(III) 異常フェルミ液体領域、(IV) 熱的臨界領域、(V) 磁気秩序相の領域に分かれる。

2.3 スピン励起に対する有効作用

このサブセクションでは、図 2 の各領域で物理量がどのような振る舞いをするかについて議論するための基礎となる、オーダーパラメータに対する有効な作用 (~自由エネルギー) について考察する。

電子の局在性が重要となるようなものは考えない。

古典的相転移の臨界現象の記述には、Landau による相転移の現象論的記述が有効であることはよく知られている。そこにおいては、Landau の自由エネルギーを磁化 m の 4 次までで展開し、

$$\begin{aligned} f(m, T) &= f_0(T) + a(T)m^2 + bm^4, \\ a(T) &= a_1(T - T_c)/T_c, \\ b &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と表し、これが $m \neq 0$ で極小値をもつかどうかで相の違いを記述する。臨界現象のもっともシンプルな記述のためには、係数 $a(T)$ は、ある T_c のまわりで $a(T) \simeq 0 + a_1(T - T_c)/T_c + a_2(T - T_c)^2/T_c^2 + \dots$ と展開できると仮定し、線形項までとする。また、 b は温度に依存しない部分だけを考える。磁化 m が空間的変調を持つ場合は、 $\nabla m(x)$ の運動項を取り入れて、

$$f = \int d^d x \left\{ am^2 + \tilde{a}(\nabla m)^2 + bm^4 \right\} \quad (3)$$

という自由エネルギーを用いればよい。

量子臨界現象を記述するには、この考えを系の「量子性」まで取り入れた形に拡張したい。そのためには系の作用を、

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \sum_q \chi^{-1}(q) \phi_q \phi_{-q} + u_0 \int d\tau \int d^d x [\phi^2(\mathbf{x}, \tau)]^2 \quad (4)$$

のようにオーダーパラメータ ϕ_q の 4 次までで展開することが出発点となる [22]。ただし $\sum_q = \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{q}}$ である。これは Ginzburg-Landau-Wilson (GLW) 作用と呼ばれる。オーダーパラメータ $\phi_q = \phi(\mathbf{q}, i\omega_n)$ は波数 \mathbf{q} だけでなく、松原周波数 ω_n (あるいは虚時間 τ) に依存する物理量であるところが、式 (3) と異なる点である。この (ボソン) 松原周波数が含まれるということは、前述のとおり、量子力学的性質が考慮されているということの現れである。 ω_n を考えることで、スピン励起が有限の時間 τ を要して伝搬する間に異なるモード間で相互作用するということが取り込めるため、(虚時間) ダイナミクスをも取り扱うことができるのである。⁷

GLW 作用 (4) の 2 次の係数 $\chi(q) = \chi(\mathbf{q}, i\omega_n)$ は帯磁率で、電子間相互作用がないときの特徴的な帯磁率の大きさ χ_0 を用いて

$$\chi^{-1}(q)/\chi_0^{-1} = \delta_0 + (q - Q)^2/q_0^2 + \frac{|\omega_n|}{\Gamma_q}, \quad (5)$$

$$\Gamma_q = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{z-2} \quad (6)$$

とかかれる。ここで Q は秩序ベクトルで、 q_0, Γ_0 は電子間相互作用のないときの特徴的長さスケールとエネルギースケール (たとえば $q_0 \sim$ Fermi 波数、 $\Gamma_0 \sim$ Fermi エネルギー) である。以下では簡単のため、適当にスケール変換して χ_0, q_0, Γ_0 はあらわにはかかない。 z は先に述べた動的臨界指数 (dynamical exponent) と呼ばれる量であり、強磁性 $Q = 0$ なら $z = 3$ 、反強磁性 $Q \neq 0$ なら $z = 2$ である。これらの値は、スケール変換の下で $\chi^{-1}(q)$ がその形を変えないという条件から導出される。強磁性の場合には $q = 0$ で $\Gamma_q^{-1} \rightarrow \infty$ であり、これは一様磁化は保存量である、つまり $q = 0$ モードの寿命は無限大であるということからきている。

また、 δ_0 は相互作用を考慮すると繰り込まれた値 $\delta_r(T, \delta_0)$ になる。Landau 自由エネルギーの $a(T)$ との違いは、 $a(T)$ は熱的相転移を記述するために $a(T) \sim (T - T_c)$ のように定義されていたが、 δ_0 は量子相転移を記述するためにミクロなハミルトニアンのパラメータ g を用いて $\delta \sim (g - g_c)$ となるという点である。(たとえば、横磁場 Ising モデル (1) なら $g = h_x/J$ である。) この $a(T)$ と δ_0 の違いは、系の臨界性の起源を熱的なもの (T) と考えるか、量子的なもの (g) と考えるかという違いを表している。また、これまで用いてきた QCP からの距離 r は、実は、 $\delta_r(T = 0, \delta_0) = 0$ となる

⁷すでに述べた通り、虚時間形式は解析接続によって実時間形式にできるので、 $i\omega_n$ (または τ) 依存性は ω (または t) 依存性と対応する。

ときの $\delta_0 = \delta_{0c}$ を用いて、 $T = 0$ において $r = \delta_0 - \delta_{0c}$ と定義されている。(r は温度には依存せず、ミクロには g の関数である。)

前述の通り、式 (3) との大きな違いは、 ω_n 依存性が存在している点である。松原周波数 $\omega_n/\Gamma_q = 0, \pm 2\pi T/\Gamma_q, \pm 4\pi T/\Gamma_q, \dots$ が効いてくるかどうかは、温度 T と揺らぎのエネルギースケールである Γ の大きさの関係によっている。もし、 $T \gg \Gamma$ であれば $\omega_n = 0$ のみが重要で $\omega_n \neq 0$ からの寄与は無視でき、この場合はモデルは、量子性を考慮していない式 (3) となる。このことは、前のセクションで述べたこと具体例となっている。

また理論的にはこの有効作用は、スピン・スピン相互作用する電子系の作用を、「Stratnovich-Hubbard 変換」すればえられる。その場合には、 $\chi(q)$ は乱雑位相近似 (random phase approximation=RPA) の形になって現れる。たとえばミクロなモデルとして Hubbard モデルを出発点にすると、 $\delta_0(U) \sim [1 - U\chi_0(\mathbf{Q}, 0)] \simeq [1 - UN_0(\varepsilon_F)]$ などとなる。ただし、 $N_0(\varepsilon_F)$ は相互作用のないときのフェルミ面での状態密度である。式 (4) はスピン励起に対する有効作用なので、スピン回転対称性をもつような系であれば、ミクロなモデルによらずに成立する。ただしこの GLW 作用は、その導出の出発点が、波数をよい量子数としてもつ準粒子がよく定義されている状態であり、局在スピン系には使えない。最近では、この作用に対する電子・正孔励起の影響 [23] や、電子の自己エネルギーによる補正 [24] などが研究されている。

以上は主に、GLW 作用の 2 次の部分についての議論であった。2 次の項は波数 q の揺らぎモード ϕ_q によって対角的に表されている (和の中身が同じ q だけにかけている) のに対して、4 次の項は様々なモード (異なる q) の積、すなわちモード間結合を表している。このモード間結合の寄与を取り入れるために、2 つの異なる方法がある。一つは Hertz-Millis によってなされた繰り込み群による理論で [25, 26]、もう一つは Moriya らによってなされた self consistent renormalization (SCR) 理論 [7, 8, 27, 28, 29] である。本講義では、統計力学的な理解の仕方である Hertz-Millis 理論を先に解説し、次に SCR 理論を簡単に紹介する。

このセクションのまとめ

- Landau の自由エネルギーの考えを拡張すると、GLW 作用 (4) が得られる。これは (松原) 周波数依存性を含んでおり、系の量子性を考慮していることに対応している。
- GLW 作用 (4) は虚時間方向と空間方向の非等方的で、この非等方性は動的臨界指数 z によって特徴付けられる。
- $\chi(q)$ の形は、強磁性 ($Q = 0$) と反強磁性 ($Q \neq 0$) とでは異なる。これは一様磁化は保存量であるのに対し、 $Q \neq 0$ のオーダーパラメータはそうではないことを反映している。

2.4 繰り込み群によるアプローチ

[繰り込み群]

Hertz-Millis は、繰り込み群に基づいて 4 次項の影響を調べた [25, 26]。繰り込み群は、系のスケールを仮想的に変化させていったときの系の見え方の変遷を記述する方法である。たとえば、横磁場 Ising モデル (1) を例に考えてみる。このモデルによらず、相転移近くの臨界的性質を決めるのは長波長領域 (波数の小さい、低エネルギー領域) における系の振る舞いである。つまり、隣接サイトどうしの S_i, S_{i+1} の関係ではなく、十分離れたサイト間の S_i, S_{i+X} , ($X \gg 1$) の関係が重要となる。しかし式 (1) では、相互作用は隣接サイト間では直接はたらくが、遠く離れたスピン S_i と S_{i+X} は直接的な相互作用ではなく、 i と $i+X$ の間にあるスピンを介して相互作用する。このため、中間にあるスピンの効果をうまく取り入れつつ、遠く離れたスピン間の関係にのみ注目することが大切になってくる。つまり、長波長の現象を理解するために、系を観察する「分解能・解像度」のスケールを $X \gg 1$ にとり、分解能 X では直接は見えない $x \ll X$ のスケールの物理現象を、スケール X の枠組みの中にうまく取り込んでしまおうということである。⁸

⁸他の例として、たとえば、「水」を考えてみる。水は、 $x \sim 10^{-8}\text{m}$ くらいのスケールでは水分子からできていることが直接認識できるが、

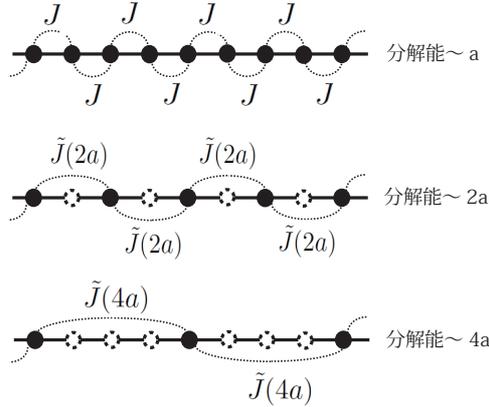


図 4: 繰り込み群のプロセス。上から順に解像度 $a, 2a, 4a, \dots$ である。

そこで、たとえば、 S_i, S_{i+1}, S_{i+2} の三つのスピンに対して、真ん中にある S_{i+1} をうまく「まびいて」、有効的に S_i, S_{i+2} の二つのスピンだけを考えることができれば、波長 $> 2a$ (a は格子定数) の部分だけに注目できる。このとき、 S_{i+1} を仲介して生じる S_i, S_{i+2} の間の有効的な相互作用 $\tilde{J}(2a)$ に、「実は解像度 $x < 2a$ のスケールでは S_{i+1} がいるのだが、それをうまくまびいた」という情報を押し込むのである。その上で、 S_{i+1} の存在を見ないことにする。そうすれば、系の最小の長さスケールは $2a$ になって、より長波長の成分の効果が見えやすくなっていく。 $(\tilde{J}(2a)$ が S_{i+1} を仲介して生じているということは、 a より短い距離 (分解能) に注目しなければ分からないことである。) これを逐次的に続けてゆけば、長さ $2a$ 以上、長さ $4a$ 以上、 \dots というように、長波長成分だけに注目してゆくことができる (図 4)。こうして、ある長さ $X \gg a$ 以上離れたサイト同士しか注目しない場合の有効的な相互作用 $\tilde{J}(X)$ や磁場 $\tilde{h}_x(X)$ が得られる。そして、この「繰り込まれたパラメータ」を見れば、長波長極限の系の振る舞いが見つかめる。たとえば、もし $\tilde{h}_x(X \rightarrow \infty) = 0$ なら、「十分長波長における系の振る舞いを見ると、磁場の影響は全くありません」ということになる。

このようにして、繰り込み群は注目する長さスケールを変化させてゆくことにより、ハミルトニアン (の中のパラメータ) の変化を追いかけて、系の振る舞いを知ることを可能にするのである。普通は、 $\tilde{J}(X), \tilde{h}_x(X)$ を求める際には、 X を変数とした、一階連立の微分方程式が出てくるので、それを「繰り込み群方程式」とよぶ。また、ここで説明したような実空間での解像度を下げてゆくような議論は、「実空間繰り込み」とよばれる。理論的には、上述のプロセスを波数空間で行い、波数のカットオフを $\Lambda \rightarrow \Lambda/b, b > 1$ のように狭めてゆく方法をとることが多い。波数の大きい状態を「まびいて」、それらが担っていた役割を、波数の小さい状態たちに押し込むのである。運動量・エネルギーのカットオフ Λ は、実空間繰り込み群の粗視化のスケール X と対応する。この節の目標である Hertz-Millis 理論も、波数空間での繰り込み群解析である。

繰り込み群は、これまで物性物理だけでなく、素粒子論や微分方程式論などでも広く使われてきた。物性物理における有名な例は近藤効果に対する Wilson 理論で、そこでは系の特徴的エネルギースケール (\sim 温度) を下げるとともに結合定数 J が変化してゆく様子が明らかにされたのであった。図 5(a) は、繰り込み群による、運動量・エネルギーカットオフ $\Lambda \sim T$ を下げていったときの有効的結合定数 J_{\pm}, J_z の変化である [33]。このような J の流れを、繰り込み群のフローという。低エネルギーでは反強磁性相互作用の結合定数 J は、有効的に強まってゆくことが見て取れる。また、量子臨界現象に関連した有名な例として Chakravarty らによる反強磁性スピン系の解析がある [34]。彼らは、系の運動量・

$X \sim 10^{-2}\text{m}$ くらいのスケールでは連続的な流体であると認識される。スケール X の水の運動を理解するには、スケール x の概念である分子という枠組みは直接必要はない。水分子という情報は、スケール X においては、粘性などの流体を特徴付けるいくつかのパラメータの中に「繰り込まれて」しまっている [32]。

このように考えると、スピンモデル (1) そのものが、電子が空間的に運動しながらクーロン相互作用を感じるという状況を、 J の中に「繰り込んで」しまい、有効的にスピンだけを考えているものだともいえる。(ここで「繰り込み」という言葉は、「ある物理的な効果や性質などを、なにか (別の) 性質や概念の中に吸収させて捉える」という意味で使っている。)

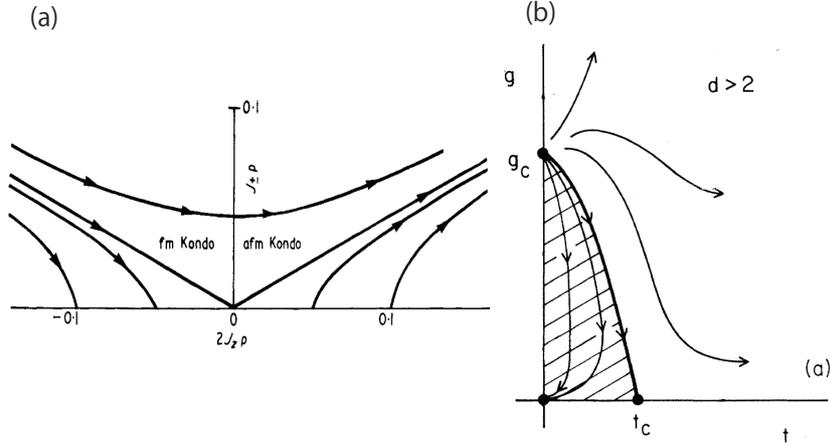


図 5: (a) 不純物近藤モデルにおける相互作用結合定数 J_{\pm} (縦軸) と J_z (横軸) の繰り込みのフロー。 ρ は Fermi 面での状態密度 [33]。 (b) 系の次元 $d > 2$ 場合の、反強磁性体の繰り込み群のフロー。 g, t はそれぞれ結合定数と温度である [34]。斜線の部分は反強磁性の磁気秩序状態である。

エネルギーのカットオフを $\Lambda \rightarrow \Lambda/b, b > 1$ に変化させて分解能を下げてゆくと、結合定数 g (\sim スピン・スティッフネスの逆数) と温度 t が大きくなるように見えるか、小さくなるように見えるかを調べた。二つのパラメータ (g, t) を、 b の関数 $g(b), t(b)$ として示したものが図 5(b) である。(ここでは繰り込み群のフローの例としてこの図を紹介しているだけなので、理論の詳細については述べない。) $t = 0, g = g_c$ に流れの湧き出し口 (不安定固定点) があり、これが AF QCP である。この QCP から高温に向かってフローがあり、QCP 上の量子臨界領域に QCP の特異性を「運んで」している様子が見える。量子臨界領域における物理量の特異性は、このようにして QCP と関連付けられるのである。以下に紹介する Hertz-Millis の理論も基本的には、これらの繰り込み群解析と同じ枠組みのものである。

[Hertz-Millis 理論]

Hertz-Millis は作用 (4) に対して、波数・周波数のカットオフを $\Lambda_k \rightarrow \Lambda_k/b, \Lambda_\omega \rightarrow \Lambda_\omega/b^z, b > 1$ のようにスケール変換し、このときの系の変化を調べて、 $b \searrow 1$ で次の繰り込み群方程式を得た。

$$\frac{dT(b)}{d \ln b} = zT, \quad (7)$$

$$\frac{d\delta(b)}{d \ln b} = 2\delta + 12u f_2(T, \delta), \quad (8)$$

$$\frac{du(b)}{d \ln b} = (4 - d - z)u - 18u^2 f_4(T, \delta). \quad (9)$$

両辺に現れる T, δ, u はすべて b の関数で、くりこまれた量である。 $\Lambda = \Lambda_0 (\equiv 1)$ ととる) での初期条件は $T = T_0, \delta = \delta_0, u = u_0$ で、 f_2, f_4 はここではあらわな形は示さないが $T(b), \delta(b)$ の関数である。

この式で特徴的なことは、 $d_{\text{eff}} = d + z$ が $d_{\text{eff}} > 4$ であれば、式 (9) の右辺は負になり、 $u(b)$ はゼロに繰り込まれるということである。そのため、 $d = 2, 3, z = 3$ と $d = 3, z = 2$ の場合には u はゼロに繰り込まれ (このような場合、 u の項は irrelevant とよばれる)、 $d = 2, z = 2$ の場合には、式 (9) の右辺の線形項はゼロになり、この範囲では u は変化しない (このような場合、 u の項は marginal とよばれる)。このように、上部臨界次元 d_u ($d > d_u$ では相互作用が重要でなくなる次元) が $d_u = 4 - z$ となることは量子相転移の特徴であり、このとき広い範囲で $u = 0$ の系 (ガウシアンモデル) の振る舞いが実現される。

また、この式からすぐに分かることは、温度が $T(b) = T_0 b^z$ のように繰り込みとともに上昇してゆくことである。これ

は、系を特徴付けるカットオフが $1/b, 1/b^z$ に縮められた場合には、相対的に温度が上がって見えるということである。繰り込みの流れに沿って b を大きくして長波長に注目してゆくと、 $T(b)$ が大きくなって $b \simeq b_0$ で $T(b_0) \simeq 1$ となると、揺らぎ ϕ にとって系の時間的大きさ L_τ は有限に感じられるようになる。(なぜなら、 $T(b) \ll 1$ では $\xi_\tau \ll L_\tau$ だったが、 $T(b) \sim 1$ では $\xi_\tau \gg L_\tau$ になるからである。) もう一つの特徴的な b は $\delta(b_1) \simeq 1$ で与えられ、系がスケーリング領域にあるためには $\delta(b_1) < 1$ が必要である。したがって b は、(I) $b \ll b_1 \ll b_0$, (II) $b \ll b_0 \ll b_1$, (III) $b_0 \ll b \ll b_1$ の3つの領域に場合分けされる。(I) では $T \ll r^{\nu z}$ 、(II) と (III) では $T \gg r^{\nu z}$ で、 $\nu = 1/2$ である。

とくに領域 (III) では $T \gg r^{\nu z}$ で、初期条件として QCP からの距離が r 方向より温度方向に離れているために、繰り込みの流れにおける温度上昇の効果が顕著である。このとき、 $d = 2, 3$ で、温度上昇 $T(b) = Tb^z$ の「速度」は、 $u(b) = u_0 b^{4-d-z}$ がゼロに収束する「速度」より速く、 $v(b) \equiv T(b)u(b)$ は b とともに大きくなる。そのため、 $\delta(b)$ は特徴的な温度依存性をもつことになる。実際、繰り込み群方程式は高温で $f_2 \sim CT$ となるために、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d \ln b} &= 2\delta + 12Cv, \\ \frac{dv}{d \ln b} &= (4-d)v \end{aligned}$$

となつて、 δ には $v = Tu$ からくる温度依存性が残る。これは、QCP $T = 0$ での基底状態の特異性に対応する $\delta \sim (g-g_c) = 0$ が、有限温度 $T > 0$ まで運ばれてくるということを示している。このことが起こるためには、 T に関する繰り込みが必要なので、ひいては $\chi(q, i\omega_n)$ の(松原)周波数依存性が重要なのである。したがって、「(虚)時間方向でのモード間結合のダイナミクスが、 $T = 0$ の QCP での特異性を有限温度まで浸み出させる」ということができる。

また、領域 (I) では $T \ll r^{\nu z}$ で、初期条件として QCP からの距離が温度方向より r 方向に離れているために、 δ は r によって支配される。このとき $T = 0$ の極限を考えると、 $f_2 \sim \text{const.}$ となるので、 $\delta(b) \simeq b^2[\delta_0 + 12u_0 f_2(0)/(d+z-2)]$ となる。この δ が $\delta \rightarrow 0$ となる点が QCP であるので、 $r = (\delta_0 - \delta_{0c})$ の中に現れる δ_{0c} は $\delta_{0c} = -[12u_0 f_2(0)/(d+z-2)]$ であることが分かる。

さらに詳しく繰り込み群方程式を解析すると、 $\delta(b_1) \sim (b_1/\xi)^2$ から、 $\xi(T, r)$ はそれぞれの領域で次のような振る舞いをする事が分かる。

[$d = 3, z = 2, 3$ の場合 (irrelevant)]

$$\begin{aligned} \text{(I) i.e. } T \ll |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq |r|, \\ \text{(II), (III) i.e. } T \gg |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq r + (B+C)uT^{1/\psi}, \quad \left(\psi = \frac{z}{z+d-2}\right). \end{aligned}$$

[$d = 2, z = 3$ の場合 (irrelevant)]

$$\begin{aligned} \text{(I) i.e. } T \ll |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq |r|, \\ \text{(II), (III) i.e. } T \gg |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq r + (B - A \ln T)uT^{1/\psi}. \end{aligned}$$

[$d = 2, z = 2$ の場合 (marginal)]

$$\begin{aligned} \text{(I) i.e. } T \ll |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq |r|, \\ \text{(II), (III) i.e. } T \gg |r|^{\nu z} \text{ のとき、} \quad \xi^{-2} &\simeq f(r) - T \frac{\ln |\ln T|}{\ln T}. \end{aligned}$$

ここで、 A, B, C は定数で f は r の関数である(詳しい値などは文献を参考にしてください)。 (II) と (III) はまとめてかいてあるが、(II) 領域では第一項が、(III) 領域では第二項が支配的である。これらより、 (d, z) によらず ξ は領域 (I) では温度依存性をほとんどもたず、揺らぎの振る舞いは、コントロールパラメータによる QCP からの距離 $|r|$ だけで決まっている。一方、領域 (II)(III) では温度依存性が重要となり、その振る舞いは系の次元 (d) や揺らぎの種類 (z) に強く依存している。この場合は、揺らぎの振る舞いは温度 T によって決まっている。静的帯磁率 χ_Q は相関長 ξ を用いて、 $\chi_Q \propto \xi^2$ なので、上の ξ の振る舞いは χ_Q の振る舞いとして観測される。

- 繰り込み群は、エネルギーの高い状態をうまく「まびいて」、低エネルギーの状態を解析する、粗視化のプロセスである。
- カノニカル・フェルミ液体領域 (I) では、相関長 ξ はほとんど温度に依存せず、圧力などのパラメータ r に強く依存する。
- 異常フェルミ液体領域 (III) では、 $T = 0$ の QCP の影響をうけて、 ξ が特徴的な温度依存性をもつ。また、その依存性は系の次元 (d) や揺らぎの種類 (z) に依存する。
- 上記の二つの領域は、クロスオーバー領域 (II) を経てなめらかにつながっている。

2.5 self consistent renormalization 理論

GLW 作用の 4 次項 (モード間結合) を評価するには別のやり方もある。Moriya らによる SCR 理論 [7, 8, 27, 28, 29] では、4 次項を適当に取り込み「よい 2 次形式」で作用を表わすことによって、物理量の振る舞いを解析する。Bogolubov-Feynmann 不等式から、真の自由エネルギーは F_{true} はパラメータ δ を含む変分自由エネルギー F_{var} と次の関係がある。

$$F_{\text{var}} = F_{\delta} + \langle S - S_{\delta} \rangle_{S_{\delta}} \geq F_{\text{true}}.$$

ここで、 S は 4 次項まで含む式 (4) であるのに対して、試行作用 S_{δ} は 2 次形式のみの

$$S_{\delta} = \frac{1}{2} \sum_q [\delta + (\mathbf{q} - \mathbf{Q})^2 + |\omega_n|/\Gamma_q] \phi_q \cdot \phi_{-q}$$

という形である。また、 F_{δ} は S_{δ} の自由エネルギーである。 $\langle \dots \rangle_{S_{\delta}}$ は S_{δ} が 2 次形式なので実行できて、

$$\begin{aligned} F_{\text{var}} &= \frac{1}{2\beta} \sum_q \ln[\delta + (\mathbf{q} - \mathbf{Q})^2 + |\omega_n|/\Gamma_q] + \frac{1}{2\beta} \sum_q \frac{\delta_0 - \delta}{\delta + (\mathbf{q} - \mathbf{Q})^2 + |\omega_n|/\Gamma_q} \\ &\quad + 3u_0 V \left(\frac{1}{\beta V} \sum_q \frac{\delta_0 - \delta}{\delta + (\mathbf{q} - \mathbf{Q})^2 + |\omega_n|/\Gamma_q} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。これを δ で変分して、 $\frac{\partial F_{\text{var}}}{\partial \delta} = 0$ より、

$$\delta = \delta_0 + 12u_0 \frac{1}{V} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^{\Gamma_q} \frac{d\omega}{\pi} \coth \frac{\omega}{2T} \frac{\omega/\Gamma_q}{[\delta + (\mathbf{q} - \mathbf{Q})^2]^2 + (\omega/\Gamma_q)^2} \quad (10)$$

を得る。これが SCR 理論の self consistent 方程式で、繰り込まれた δ は T, δ_0 の関数 $\delta(T, \delta_0)$ として計算される。このようにして計算される δ は、前節で議論した繰り込み群による解析と一致する。SCR 理論の方程式においても、 ω_n 依存性が δ の振る舞いに重要な役割を果たしていることが分かる。また、SCR 理論では δ が特異な T 依存性を示すのは量子臨界領域の中の狭い低温領域だけで、それより高温の広い領域では、 ξ は $\xi^{-2}(T) = T + \theta$ という Curie-Weiss 的な振る舞いを示す。この Curie-Weiss 則は普遍的な電子系のスピン励起が示す振る舞いであり、量子相転移に特有の振る舞いである。これは繰り込み群による解析では示されておらず、SCR の方程式 (10) を数値的に解くことによって得られたものである。この違いは、Hertz-Millis の繰り込み群ではモード間結合を摂動論的に扱っているのに対し、SCR では変分計算によりモード間結合の非摂動効果まで取り入れられているからであると考えられる。⁹ 実験的には、この Curie-Weiss 的振る舞いは多数の物質で確認されている。SCR 理論は実験から決定されるいくつかのパラメータを含んでおり、それらを用いることによって定量的な解析ができるという利点がある。

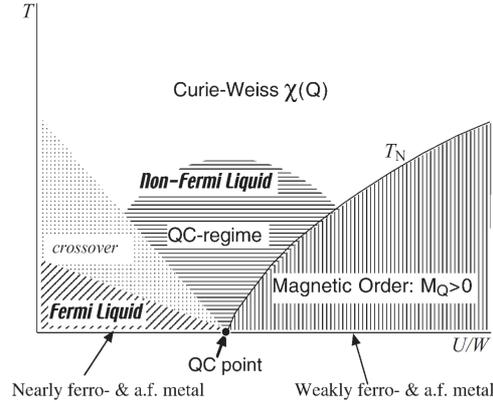


図 6: SCR 理論による磁気量子臨界点近傍の典型的な相図 [8]。縦軸は温度 T 、横軸はコントロールパラメータ U/W (U は電子間相互作用の強さで、 W はバンド幅)。QCP での U を U_c とかくと、図 2 の横軸とは $r = W(1/U - 1/U_c)$ の関係がある。QC は Quantum Critical の略。「Fermi liquid」、「non-Fermi liquid」は、本稿ではそれぞれ、カノニカル・フェルミ液体、異常フェルミ液体のことである。

図 6 はこれらの結果をまとめた相図であり、図 2 との違いは、Curie-Weiss 領域の有無である。また、SCR の数値計算の例として、3 次元 AF の場合の静的帯磁率、比熱、NMR $1/T_1$ 、電気抵抗を図 7 に示す [29, 30, 31]。帯磁率や比熱は SCR の枠組みのみ求められるが、電気抵抗については Boltzmann 方程式を用いている。 $1/\chi_Q$ は極低温での $\sim T^{3/2}$ から温度が上がるに従って $\sim T + \theta$ のような Curie-Weiss 的振る舞いになることが見て取れる。 $\chi_Q \propto \xi^2$ であるから、帯磁率の温度依存性はそのまま相関長の温度依存性と関係付けられる。相関長の特徴的振る舞いに伴って、比熱、 $1/T_1$ 、電気抵抗もそれぞれ、カノニカル・フェルミ液体とは異なる温度依存性を示している。

— このセクションのまとめ —

- SCR 理論は、相関長 ξ に関する self consistent な方程式 (10) を導き出す。
- SCR 理論の方程式 (10) を解くと、量子臨界領域の中の低温領域で ξ に特徴的な温度依存性が現れる。また、その温度依存性は繰り込み群による解析結果と一致する。
- ξ がそのような温度依存性を示すのは比較的狭い温度領域で、それより上の広い温度領域では、Curie-Weiss 的振る舞いが現れる。

2.6 量子臨界点近傍の物性

以上のように、量子臨界点近傍では $\xi(T, r)$ が特異な温度依存性や外部パラメータ依存性をもち、そのためにさまざまな物理量も特徴的な温度依存性を示す。物理量の中には、系の臨界的性質だけから定まるユニバーサルな量と、臨界的性質に加えて系の詳細にも依存しうる量とがある。前者としては Fermi 面の全体で積分するようなバルク量があり、後者として Fermi 面の形状にも依存する輸送量がある。ここでは、バルク量として比熱 C 、NMR $1/T_1$ を、輸送量として電気抵抗率 $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ の振る舞いを考える。比熱は自由エネルギーの温度微分から得られ、NMR $1/T_1$ は公式 $1/T_1 T \propto \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} (1/N) \sum_{\mathbf{q}} \text{Im} \chi^{+-}(\mathbf{q}, \omega_0) / \omega_0$ から求まる。また、電気抵抗は Boltzmann 方程式や電子の自己エネ

⁹このことは上田和夫氏にご指摘いただいた。

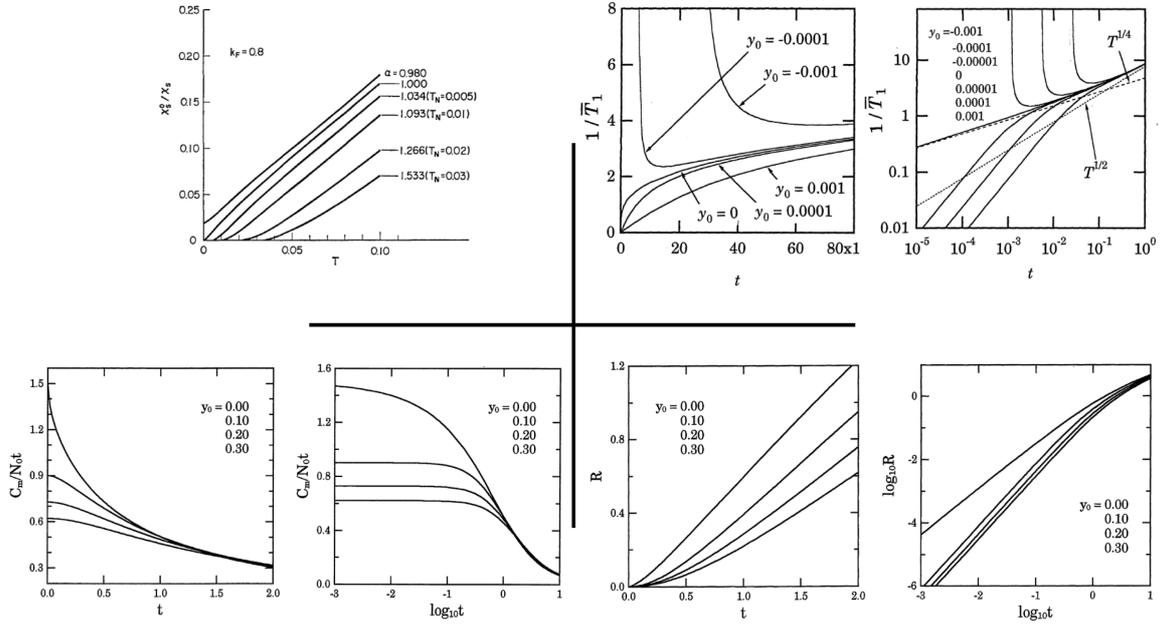


図 7: SCR 理論による 3 次元 AF 揺らぎの場合の、帯磁率 χ_0/χ_Q (左上)、NMR $1/T_1$ (右上)、比熱 C/T (左下)、電気抵抗 R (右下) の温度依存性 [29, 30, 31]。 t は適当にスケールされた温度。

ルギーの虚部からも求められる。¹⁰ 表 1 は量子臨界領域 (III) における物理量の温度 T 依存性、表 2 は Fermi 液体領域 (I) における物理量のコントロールパラメータ r 依存性である。これらは繰り込み群と SCR 理論の結果をまとめたもので、 ξ が量子臨界領域の高温側で Curie-Weiss 的振る舞いを示すことを「 $\dots \rightarrow CW$ 」と書いた。また、量子臨界領域で、 $d=3$ 反強磁性揺らぎの場合に、電気抵抗が、低温での $T^{3/2}$ から高温で T 的振る舞いにクロスオーバーすることが SCR 理論で示されている。

物理量	FM $d=3$	FM $d=2$	AF $d=3$	AF $d=2$	CFL
$\xi^{-2} \sim \chi_Q^{-1}$	$T^{4/3} \rightarrow CW$	$-T \ln T \rightarrow CW$	$T^{3/2} \rightarrow CW$	$-T \ln \ln T / \ln T \rightarrow CW$	const. + T^2
C/T	$-\ln T$	$T^{-1/3}$	const. $-T^{1/2} \rightarrow -\ln T$	$-\ln T$	const.
$1/T_1 T$	χ_Q	$\chi_Q^{3/2}$	$\chi_Q^{1/2}$	χ_Q	const.
$\Delta\rho$	$T^{5/3}$	$T^{4/3}$	$T^{3/2} \rightarrow T$	T	T^2

表 1: 量子臨界領域 (III) における物理量の温度依存性。「 $T^\alpha \rightarrow CW$ 」や「 $T^\alpha \rightarrow T^\beta$ 」は、QCP にごく近い低温では T^α のように振る舞い、高温では Curie-Weiss や T^β のようになることを示す。FM は強磁性、AF 反強磁性。比較のためにカノニカル・フェルミ液体 (CFL) における温度依存性も示してある。

セクション 2.2 でも触れたが、電気抵抗に関連して一言だけ述べておく。電気抵抗は、ほとんど準粒子の寿命 τ_{qp} だけで決まることが多い ($\Delta\rho \propto \tau_{qp}^{-1}$)。したがって、 $\Delta\rho$ の温度依存性は、準粒子の寿命の温度依存性であると解釈される。表 1 をみると、どの場合も、 $\tau_{qp} \sim T^{-\alpha}$ のベキは $\alpha \geq 1$ である。つまり、十分低温では、準粒子が熱的に壊される時間スケール $\tau_{thermal} \sim T^{-1}$ よりも、準粒子の寿命 τ_{qp} の方が長いのである。したがって、異常フェルミ液体領域 (量子臨

¹⁰電気抵抗率に対しては、Fermi 面上のどの部分の電子が伝導に寄与するかということ [35] や、不純物散乱の効果が大切になるということ [36] が指摘されている。また、AF の場合にミクロなモデルで Kubo 公式を使った研究でも、表 1 と同じ振る舞いが示されている [37]。

物理量	FM $d = 3$	FM $d = 2$	AF $d = 3$	AF $d = 2$
$\xi^{-2} \sim \chi_Q^{-1}$	r	r	r	r
C/T	$-\ln r$	$r^{-1/2}$	$\text{const.} \cdot r^{1/2}$	$-\ln r$
$1/T_1 T$	χ_Q	$\chi_Q^{3/2}$	$\chi_Q^{1/2}$	χ_Q
$\Delta\rho/T^2$	$r^{-1/2}$	r^{-1}	$r^{-1/2}$	r^{-1}

表 2: FL 領域 (I) における物理量のコントロールパラメータ r 依存性。 $r \geq 0$ は量子臨界点からの距離で、Stoner 因子 $S = [1 - U\chi_0(Q, 0)]^{-1}$ とは $r^{-1} = S$ の関係がある。この領域では温度依存性は弱い。

界領域) においても、準粒子というものはよく定義される。(ただし $d = 2, z = 2$ の 2 次元 AF の場合には、marginal フェルミ液体といわれる状態である [15]。) しばしば重い電子系で、異常フェルミ液体的性質を示しつつより低温で超伝導状態が現れるのは、準粒子の寿命がそれなりに長く、Cooper をつくることのできるからである。また、 $r = 0$ の QCP 直上で準粒子ウエイトが $z = 0$ となるような場合には、そこでフェルミ液体がきちんと定義できなくなり、注意が必要である。

— このセクションのまとめ —

- QCP 近傍では、相関長 ξ が特徴的な T, r 依存性をもつために、比熱や $1/T_1$ や電気抵抗などにも特異な振る舞いが現れる。
- カノニカル・フェルミ液体領域 (I) では、物理量の温度依存性は自由電子系と同じだが、その係数は QCP からの距離 r に敏感である。(表 2)
- 異常フェルミ液体領域 (III) では、物理量の温度依存性そのものが自由電子系と異なるものとなる。(表 1)
- 異常フェルミ液体領域においても、フェルミ面は存在し準粒子はよく定義される。ただし、2 次元反強揺らぎでの marginal フェルミ液体や、QCP 直上の準粒子ウエイトがゼロになる領域においては注意が必要である。

3 強相関電子系の超伝導

このセクションでは、強相関電子系の超伝導を理論的に扱う基礎として、Eliashberg 方程式を解説する [38, 39, 40]。Eliashberg 方程式は、ギャップ関数の周波数依存性や準粒子ダンピングの効果まで扱えるように、BCS ギャップ方程式を拡張した方程式である。Eliashberg 方程式の性質や超伝導不安定性、さらに相互作用と超伝導対称性の関係について議論し、unconventional 超伝導と親しもう。最後に、スピン揺らぎ誘起の超伝導における、揺らぎの強さと転移温度 T_c の関係などについても簡単に述べる。基本的な枠組みはウラン系のような多バンドの系にも一般的に通用するものであるが、ここでは簡単のためにシングルバンドのモデルを考える。

3.1 Eliashberg 方程式 ~ BCS ギャップ方程式の拡張 ~

このサブセクションでは、BCS ギャップ方程式の拡張として Eliashberg 方程式を導く。BCS 平均場理論は、 $\langle c_{k\uparrow} c_{-k\downarrow} \rangle$ のような量を平均場として扱う理論である。そのため、相互作用の強い系を定量的に考えたいときには、強相関効果を取り入れるための拡張が必要であることをあらかじめ述べておく。それを可能にするのが Eliashberg 方程式と呼ばれる、拡張されたギャップ方程式である。

BCS 平均場理論によると、スピン回転対称な系では、超伝導ギャップ関数はシングレット・トリプレットの両方とも、

$$\Delta(\mathbf{k}) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}'}/2)}{2E_{\mathbf{k}'}} \Delta(\mathbf{k}') \quad (11)$$

という形にまとめることができる。ここで、 $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta(\mathbf{k})^2}$ は Bogolubov 準粒子の分散で、 $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ は波数 $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ の電子対が波数 $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ に散乱される様を表すペアリング相互作用である。この平均場ギャップ方程式は弱結合の場合に有効であり、相互作用 V にもギャップ関数 Δ にも周波数依存性はない。そのため、 V に関しては、電子が相互作用するときに有限の時間が必要であること（遅延効果）が入っておらず、また、相互作用の及ぶエネルギー範囲を指定するために勝手なカットオフ（デバイ振動数など）を導入しなくてはならない。前者は、エネルギー的に離れた電子たちはエネルギー的に近い電子たちより相互作用が弱いことに対応している。このため、前者と後者は本質的には同じことであり、 V の周波数依存性を正しく扱えば自然に導入される性質である。電子の性質に対しては、Cooper ペアをつくる電子自身が散乱されて寿命をもつ効果（準粒子ダンピング）と、Cooper ペアを作れるようなよい準粒子である電子状態が減る効果（準粒子繰り込み）が入っていない。この二つは、理論的には電子の自己エネルギーに対応している。強相関電子系ではこれらの効果は重要になってくるため、BCS ギャップ方程式 (11) を改良して遅延効果や自己エネルギーを取り込む必要がある。

BCS ギャップ方程式：

相互作用の遅延効果と、電子の準粒子ダンピング・繰り込みの効果が入っていない。
これらの強相関効果を取り入れた、Eliashberg 方程式が必要。

求めるべき新しい方程式は、周波数に依存する $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V(i\omega_n, \mathbf{k}; i\omega_{n'}, \mathbf{k}')$ と $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(i\omega_n, \mathbf{k})$ を含み、特別な場合として、周波数 ω_n に依存しない $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta(\mathbf{k})$ のときには BCS ギャップ方程式を再現するものでなくてはならない。そこで、 ω_n 軸を囲むような経路での以下のような積分が、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^2 + E_{\mathbf{k}}^2} f(z) dz &= -T \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + E_{\mathbf{k}}^2} + \frac{\tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2)}{2E_{\mathbf{k}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることを思い出すと（ f は Fermi 分布関数）求めるべき方程式は

$$\Delta(\mathbf{k}) = -\frac{T}{N} \sum_{\omega_{n'} \mathbf{k}'} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\Delta(\mathbf{k}')}{\omega_{n'}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta(\mathbf{k}')^2}$$

となりそうである。これで V と Δ が周波数依存性をもつ場合のギャップ方程式が導けたわけであるが、さらに電子の正常自己エネルギー $\Sigma_n(\mathbf{k})$ を導入して電子間の非弾性散乱の効果を取り入れるには、基本的には、 $\varepsilon_{\mathbf{k}} \rightarrow \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma_n(\mathbf{k})$ とすればよい。最終的に得られたギャップ関数に対する方程式を、Eliashberg 方程式という。多くの教科書では、Nambu 形式というものをを用いて Eliashberg 方程式を導出しており、そこでの表記にしたがうと、

$$F(\mathbf{k}) = \frac{\Delta(\mathbf{k})}{[i\omega_n - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \Sigma_n(\mathbf{k})][i\omega_n + \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma_n(-\mathbf{k})] - |\Delta(\mathbf{k})|^2} \quad (12)$$

という異常 Green 関数を用いて、Eliashberg 方程式は次のようにかける。

— 非線形 Eliashberg 方程式 —

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{T}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F(\mathbf{k}'). \quad (13)$$

これは Feynmann ダイアグラムで表すと図 8 のようになっており、周波数・波数 $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}') = (i\omega_{n'}, \mathbf{k}'; -i\omega_{n'}, -\mathbf{k}')$ の電

子対が相互作用 $V(k, k')$ によって散乱されて $(k, -k)$ の電子対になり、その過程を通じて Cooper ペアが形成されてゆくことを表している。

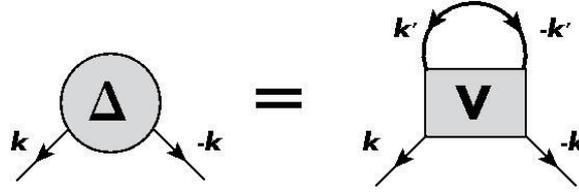


図 8: 非線形 Eliashberg 方程式 (13) のダイアグラム。

この方程式はすべての温度領域で成立するが、とくに $T \simeq T_c$ の近傍では方程式を線形化して、

線形 Eliashberg 方程式

$$\Delta(k) = -\frac{T}{N} \sum_{k'} V(k, k') G(k') G(-k') \Delta(k'), \quad (14)$$

$$G(k) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_k - \Sigma_n(k)} \quad (15)$$

という線形化された Eliashberg 方程式を用いることが多い (図 9)。これは連続的な超伝導転移の転移温度を求める際に有用である。また、 $G(k)$ は (正常) Green 関数であり、この中に準粒子の繰り込みの効果が入っている。式 (14) の右辺は、「Cooper ペアを作ろうとしている電子対が $G(k), G(-k)$ で記述されるように運動し、 V でペアリング相互作用をする」ということを主張している。

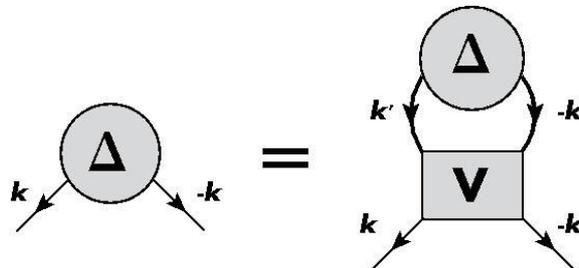


図 9: 線形 Eliashberg 方程式 (14) のダイアグラム。

$g^2(k) \equiv G(k)G(-k) = |G(k)|^2$ は、フェルミ面近傍の k に対して値が大きく、フェルミ面から遠い k に対しては値が小さい。これは、 $T = T_c$ でフェルミ面近傍の電子だけが超伝導に参加する、ということの現れである。また、 $g(k)$ は相互作用がない場合にも最大値のピークは温度 T によってぼやけており、 $T \rightarrow 0$ にしたがってシャープになってゆく。ただし、強相関係では (i) 準粒子の寿命によって、フェルミ面がさらにぼやけていることにも注意が必要である。相互作用によって (ii) 準粒子のウェイトが減っていることも、転移温度の評価の際には重要になる。これを見るには、松原周波数 $i\omega_n$ でなく普通の周波数 ω を用いた Green 関数を、フェルミエネルギーである $\omega \simeq 0$ あたりで近似するとよい。

$\Sigma_n(\omega) \simeq \text{Re}\Sigma_n(0) + i\text{Im}\Sigma_n(0) + \frac{\partial \text{Re}\Sigma_n(0)}{\partial \omega} \omega$ と近似して (通常 $\frac{\partial \text{Im}\Sigma_n(0)}{\partial \omega} = 0$ である)

$$\begin{aligned} G(k) &\simeq \frac{z_k}{\omega - \tilde{\varepsilon}_k + i\gamma_k}, \\ z_k &= \left(1 - \frac{\partial \text{Re}\Sigma_n(0)}{\partial \omega}\right)^{-1}, \\ \tilde{\varepsilon}_k &= z_k[\varepsilon_k + \text{Re}\Sigma_n(0)], \\ \gamma_k &= -z_k \text{Im}\Sigma_n(0). \end{aligned}$$

(i) は準粒子が γ_k^{-1} という寿命をもっているということであり、(ii) は Green 関数の絶対値が $z_k \leq 1$ 倍されていることに対応する。これより、 $g^2(k) = G(k)G(-k) = |G(k)|^2$ は、 Σ_n のないときに比べて全体的に小さくなっていることが分かる。そのフェルミ面での値は z_k 倍になり、その幅は γ_k の分だけブロードになる。

方程式 (13)、(14) は基本的には、よく定義された準粒子が Cooper ペアをつくるという描像に基づいており、準粒子の寿命がある程度長ければ超伝導状態を表す解を見つけることができる。そして一旦ギャップ $\Delta(k)$ が求めれば、それを用いて超伝導状態の熱力学量を解析することができる。この意味で Eliashberg 方程式は、超伝導状態を解析する上で最も基本的な方程式である。ちなみに、ギャップ関数が分かれば熱力学的性質が分かるということは、常伝導状態で自己エネルギー、ひいては 1 粒子 Green 関数が求めれば、その熱力学的性質が分かるということと事情は同じである。ギャップ関数はまさに超伝導状態における自己エネルギーであり、この意味で異常自己エネルギー (anomalous selfenergy) ともよばれる。

Eliashberg 方程式さえ解ければ、超伝導状態の熱力学的性質は理解できる。しかし、Eliashberg 方程式にはインプットとして正常自己エネルギー Σ_n とペアリング相互作用 V が必要であり、強相関係でこれらを計算することは容易ではない。通常は、 V や Σ_n を求める際に何かしらの近似を必要とする。

— このセクションのまとめ —

- BCS ギャップ方程式 (11) は、強相関効果である、相互作用の遅延効果と電子の繰り込みや寿命の効果が入っていない。
- Eliashberg 方程式 (13),(14) は BCS ギャップ方程式の拡張で、相互作用の遅延効果と電子の繰り込みや寿命の効果が入っている。転移温度の定量的理解のためには、これらの効果が大切になってくる。
- Eliashberg 方程式がきちんと解ければ、強相関効果を取り入れた上でのギャップ関数が求まり、超伝導状態の熱力学的性質はすべて分かることになる。

3.2 ペアリング相互作用と超伝導

このセクションでは、Eliashberg 方程式の性質やペアリング相互作用 V と Δ の関係などについて議論する。Eliashberg 方程式を強相関係で解析するのは、一般には難しく、前述したように V, Σ_n の評価には近似を必要とする。しかし、Eliashberg 方程式は基本的性質として Cooper 不安定性を含んでおり、このことが超伝導状態の解を与える。また、どのような超伝導状態が安定なのかといったより詳細な情報のためには、ペアリング相互作用 V の性質が必要であり、群論的な一般論が有用となる [41]。

3.2.1 Cooper instability

ペアリング相互作用や Fermi 面の形状などの適当な条件がそろえば、Eliashberg 方程式は十分低温で解をもち超伝導状態が現れる。この Eliashberg 方程式の解の存在性の最も基本となっているのは、いわゆる Cooper 不安定性である。

これは、ペアリング相互作用や Fermi 面の形状などの系ごとに異なるような詳細な事柄によらずに、Fermi 面が存在していることそのものが超伝導への不安定性をもつことを主張する (Fermi 面効果)。それは線形化された Eliashberg 方程式 (14) から顕著に読み取ることができる。方程式の左辺を右辺に逐次代入してゆくと、

$$\begin{aligned}\Delta(k) &= -\frac{T}{N} \sum_{k_1} V(k, k_1) G(k_1) G(-k_1) \Delta(k_1) \\ &= \left(-\frac{T}{N}\right)^2 \sum_{k_1, k_2} [V(k, k_1) G(k_1) G(-k_1)] [V(k_1, k_2) G(k_2) G(-k_2)] \Delta(k_2) \\ &= \dots\end{aligned}$$

のように VGG がひと固まりで何回も現われて、多重散乱が記述されていることが分かる。これをダイアグラムの表したのが図 10 である。 V は系の詳細によるが、 $G(k)G(-k)$ 部分 (particle-particle bubble) は V とは独立に常に存在

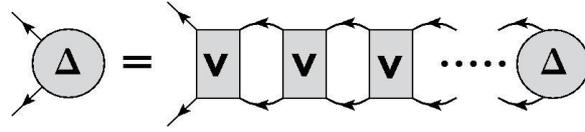


図 10: 線形 Eliashberg 方程式 (14) の左辺を右辺に逐次代入したダイアグラム。

し、これが \log 的発散と関係するために、方程式に非自明解が存在することになる。このことは、磁気秩序に対する帯磁率と同じようなものである、超伝導感受率 $P_\mu(q)$ に見てとれる [42]。超伝導感受率はペアリング状態への不安定性を測る量で、

$$B_{q\mu} = \frac{1}{2} \sum_{k\alpha\beta} d_\mu(\mathbf{k}) (i\sigma_\mu \sigma_2)_{\alpha\beta}^\dagger c_{k+q\alpha} c_{-k\beta}, \quad (16)$$

$$P_\mu(q) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle B_{q\mu}(\tau) B_\mu^\dagger(0) \rangle \quad (17)$$

で定義される。ここで $d_\mu(\mathbf{k})$, $\mu = 0 \sim 3$ は (singlet まで含めた) d -vector で、超伝導ギャップの波数依存性を表す。 $G(k)G(-k)$ の発散性をみるには、 P_μ を最も簡単な場合である相互作用のない場合に評価すればよい。

$$\begin{aligned}P_\mu^0(q, i\omega_n) &= \frac{T}{N} \sum_{\mathbf{k}} |d_\mu(\mathbf{k})|^2 G^0(k+q) G^0(-k) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} |d_\mu(\mathbf{k})|^2 \frac{1 - f(\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q})) - f(\varepsilon(-\mathbf{k}))}{i\omega_n - [\varepsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q}) + \varepsilon(-\mathbf{k})]}.\end{aligned}$$

式の中に $G^0(k+q)G^0(-k)$ という、 $G(k)G(-k)$ に対応するものが入っていることが大切である。これは $q = 0, i\omega_n = 0$ で最大をとり、¹¹ その値は

$$P_\mu^0(q = 0, i\omega_n = 0) \simeq \langle |d_\mu(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{FS}} N(0) \log\left(\frac{\epsilon_c}{T}\right) \quad (18)$$

のように $\log T$ で発散する。ここで、 f は Fermi 分布関数、 ϵ_c は適当なエネルギーカットオフである。これは相互作用のない状況でも、系に基本的に備わっている不安定性である。この発散は、Eliashberg 方程式の散乱過程 VGG が低温で \log 的に効いてくることを示しており、ある程度一般的な状況でも超伝導の発現を期待させる。この事情は基本的には、BCS ギャップ方程式と同じである。

しかし、このような基本的な超伝導への不安定性はあるものの、実際に超伝導がおこるかどうかは Δ, V の詳細や Fermi 面の形状などにも強く依存する。

¹¹ \mathbf{q} は Cooper ペアの重心運動量であり、 $\mathbf{q} \neq 0$ は Fulde-Ferrel-Larkin-Ovcchinkov 状態に対応する。

- たとえば、 $\langle |d_\mu(\mathbf{k})|^2 \rangle \leq 1$ なので、相互作用を考えなければ、異方的超伝導は full ギャップに比べて Cooper 不安定性は弱い。
- 他にも、ペアリング相互作用が非常に強く k 依存性をもつ場合は、 V は一般には Fermi 面の全面で引力的であることはなく、引力的である Fermi 面上の k 点で状態密度が大きいとも限らない。この場合には超伝導は起こりにくく、 P_μ はなかなか発散しない。
- あるいは反対に、 V が引力的である Fermi 面上の点で状態密度が大きいこともありうる。高温超伝導体はこのような場合に相当していると考えられ、ネスティングベクトル $Q = (\pi, \pi)$ による散乱は、van Hove 特異点の電子に対し $d_{x^2-y^2}$ 超伝導への強い引力としてはたらく。

このようなことは、 P_μ を相互作用の影響まで考慮して計算することでも議論できる。実際、 $P_\mu(q=0, i\nu_n=0)$ のダイアグラムは図 11 のようになっていて、その中にペアリング相互作用 $V(k, k')$ を含み、

$$P_\mu(0) = \frac{T}{N} \sum_k |d_\mu(\mathbf{k})|^2 G(k)G(-k) + \left(\frac{T}{N}\right)^2 \sum_{kk'} d_\mu^*(\mathbf{k})G(k)G(-k)V_\mu(k, k')G(k')G(-k')d_\mu(\mathbf{k}')$$

と表される。右辺は、線形化された Eliashberg 方程式 (14) の両辺に $(T/N) \sum_k \Delta_\mu^*(k)G(k)G(-k)$ したものと基本的に同じである。したがって、 P_μ の発散と Eliashberg 方程式が非自明解をもつことは同値である。このことを用いて、高温

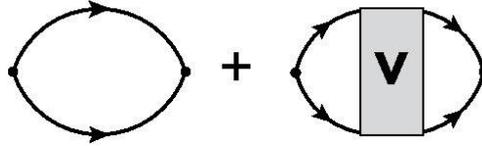


図 11: 超伝導感受率 P のダイアグラム。

から P_μ を評価することによって超伝導転移温度 T_c を見積もることもできる。これは (反) 強磁性に関して、帯磁率の発散的振る舞いから Curie 温度や Neel 温度を決めることと同じやり方である。詳細は述べないが、たとえば functional renormalization group という計算方法で、2次元正方格子の系に対して $d_0(\mathbf{k}) \sim (\cos k_x - \cos k_y)$ という対称性の P_0 (論文では χ_{dw} と表されている) を計算すると図 12 のようになる [43]。挿入図はフェルミ面で、反強磁性秩序に対応す

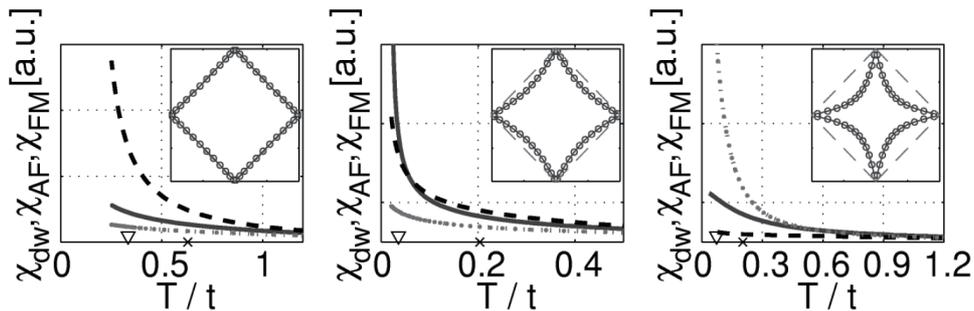


図 12: d 波超伝導、強磁性、反強磁性のそれぞれに対する感受率 $\chi_{\text{dw}}, \chi_{\text{FM}}, \chi_{\text{AF}}$ の計算結果 [43]。実線が χ_{dw} 、太い点線が χ_{AF} 、薄い点線が χ_{FM} 。横軸は理論のエネルギー単位 t で測った温度 T 。縦軸は任意の単位 (arbitrary unit) で測られていて、絶対値に意味はない。

る $Q = (\pi, \pi)$ での帯磁率 χ_{AF} と、強磁性秩序への不安定性を測る χ_{FM} も同様に評価されている。横軸は、理論のエネ

ルギー単位 t で測った温度 T である。これを見ると、完全ネスティングする Fermi 面では χ_{AF} が高い温度で発散し、AF への不安定性が一番大きいことがわかる。この発散する温度以下では、系は反強磁性相にあるということになる。少しネスティングが悪くなった Fermi 面では、 χ_{dw} が先に発散し、 d 波が安定化する。さらに右端のグラフの場合には、強磁性が安定化する。

— このセクションのまとめ —

- Eliashberg 方程式は、BCS ギャップ方程式と同様に、基本的性質として超伝導への不安定性を含んでいる。
- この不安定性を図る指標である（磁気秩序に対する帯磁率に対応する）超伝導感受率は、相互作用がなくても低温で $-\log T$ 的に発散する。
- 相互作用を考慮すると、超伝導が実際に起こりうるかどうかは、その波数依存性などに大きく依存する。

3.2.2 ペアリング相互作用と超伝導対称性

前節で Cooper instability について解説したが、超伝導が発現するかどうか、発現するとしたらどのような対称性の超伝導かという問題を議論するには、ペアリング相互作用や Fermi 面の形状といった物質固有の情報を考慮する必要がある。ここでは、ペアリング相互作用と超伝導の対称性の関係について解説する。この議論のためには遅延効果や準粒子ダンピングの効果は重要ではないので、簡単のため弱結合の場合を考える [41]。

一般にペアリング相互作用 V は、点群の規約表現の基底で展開され、

$$V(k, k') = \sum_{\Gamma} V_{\Gamma}(k, k') \quad (19)$$

のようにかくことができる。例として系が $SO(3)$ 対称な場合を考え、ペアリング相互作用は、球形の Fermi 面の近傍の電子にのみはたらくとする。すると V は k, k' の大きさによらず、その角度のみに依存するので、球面調和関数で展開できる。 $\hat{k} = k/k_F$ とすると、

$$V(\hat{k}, \hat{k}') = v_0 + \sum_{m=-1}^1 v_{1m} Y_1^m(\hat{k}) Y_1^{m*}(\hat{k}') + \sum_{m=-2}^2 v_{2m} Y_2^m(\hat{k}) Y_2^{m*}(\hat{k}') + \dots \quad (20)$$

$$\equiv \sum_{lm} V_{lm}(\hat{k}, \hat{k}'). \quad (21)$$

Cooper ペアの軌道角運動量を $l = 0, 1, \dots$ とすると、それぞれ v_0 は $l = 0(s)$ 、 v_{1m} は $l = 1(p)$ 、 v_{2m} は $l = 2(d)$ の超伝導状態に対するペアリング相互作用の大きさで、上述の V_{Γ} に対応している。この中で特定の (l, m) の引力が他のチャンネルに比べて十分大きい場合には、相互作用は $V(\hat{k}, \hat{k}') \simeq V_{lm}(\hat{k}, \hat{k}')$ と近似でき、超伝導ギャップ関数は V_{lm} と同じ対称性をもつようになる。これはギャップ方程式からも理解できる。Fermi 面近傍だけを考えたと超伝導ギャップ関数も \hat{k} の関数だから球面調和関数で展開でき、

$$\Delta(\hat{k}) = \sum_l \sum_m c_{lm} Y_l^m(\hat{k}) \quad (22)$$

とかける。ギャップ方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{k}) &\propto -\langle V(\hat{k}, \hat{k}') \Delta(\hat{k}') \rangle_{k' \in \text{FS}} \\ &\propto -v_{lm} Y_l^m(\hat{k}) \int d\Omega_{k'} Y_l^{m*}(\hat{k}') \sum_{l'm'} c_{l'm'} Y_{l'}^{m'}(\hat{k}') \\ &\propto -v_{lm} c_{lm} Y_l^m(\hat{k}) \end{aligned}$$

となり、ペアリング相互作用と同じチャンネルの対称性しか残らない。係数まで含めて書いたときの最後の右式が左辺と同じになるには、 $v_{lm} < 0$ でなければならず、これは (l, m) という対称性のチャンネルが引力的でなければならないことを示している。

一般の点群 G の場合にも同様の議論を行うことができる。ペアリング相互作用を点群 G の表現の基底で展開して、

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\Gamma} v_{\Gamma} \varphi_{\Gamma}(\mathbf{k}) \varphi_{\Gamma}(\mathbf{k}') \quad (23)$$

としたときに、ある対称性 Γ のチャンネルが強い引力であれば、超伝導ギャップ関数は $\Delta \sim c\varphi_{\Gamma}$ となるのである。このときの Bogolubov 準粒子の分散は $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + |c\varphi_{\Gamma}(\mathbf{k})|^2}$ で、超伝導相での対称性は、この関数 E_k が不変となる部分群 $H \subset G$ まで低下することになる。たとえば $\varphi_{\Gamma} = k_x^2 - k_y^2$ の場合には、 $\varepsilon_k = \mathbf{k}^2/2m$ であっても k_x, k_y と k_z は対等ではなくなる。このような対称性の低下は、異方的超伝導体に特有の現象である。

このように V, Δ は点群の規約表現によって分類されるが、 V がどのような性質をもつのかは Fermi 面の形状などの系の詳細に依存する。たとえば、高温超伝導体では (i) $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ の散乱が、ネスティングにより強く誘起される。さらに、(ii) フェルミ面上でこの条件を満たす波数は、 $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \simeq (\pm\pi, 0), (0, \pm\pi)$ という状態密度の高い van Hove 特異点あたりの波数である。したがって、(i) より V は $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{Q}$ にピークをもち、(ii) より \mathbf{k}, \mathbf{k}' のみに注目する考え方が正当化される。この考えの下では、 $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \sim v(\cos k_x - \cos k_y)(\cos k'_x - \cos k'_y)$ のように近似できることになる。この近似された V は $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{Q}$ に対しては、たしかに引力的で、他の散乱過程より強度も大きい。したがって、もともとのフェルミ面のもつネスティングの性質と van Hove 特異性から、相互作用は、有効的に $(\cos k_x - \cos k_y)$ という特定の対称性をもつと考えられるのである。

— このセクションのまとめ —

- ペアリング相互作用 V が波数空間で特定の対称性をもつとき、 V によって誘起されるギャップ関数も、同じ対称性をもつ。
- 実際には V が特定の対称性だけをもつことはないが、フェルミ面などの系の詳細によって、有効的に特定の対称性のチャンネルだけに強い引力が現れることが可能である。

3.2.3 スピン揺らぎと超伝導のパリティ

このセクションでは、ペアリング相互作用と超伝導のパリティ (スピン・シングレットであるか、スピン・トリプレットであるか) の関係について、相互作用がボソンの運動を表す関数 D を用いて $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \propto D(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ とかける場合に限って議論する。このような場合は、Cooper ペアをつくる電子対が、お互いに D で表されるボソンを交換して引力を感じていると解釈できる。

一般にギャップ関数は、4成分 d -vector (d_0, d_1, d_2, d_3) を導入して

$$\Delta(\mathbf{k}) = [d_0(\mathbf{k})\sigma_0 + \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}]i\sigma_2 \quad (24)$$

と表すことができる。¹² d_0 はシングレット部分で、 \mathbf{d} はトリプレット部分である。結晶に空間反転対称性があれば、通常、超伝導は偶・奇のどちらかのパリティのみをもち、ギャップ関数のうち d_0, \mathbf{d} のどちらかはゼロとなる。以下ではこのような場合のみを考える。

スピン回転対称な場合には、Eliashberg 方程式は d_{μ} に対して、

$$d_{\mu}(\mathbf{k}) = -\frac{T}{N} \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mu}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') G(\mathbf{k}') G(-\mathbf{k}') d_{\mu}(\mathbf{k}') \quad (25)$$

¹² 簡単のために前節では触れなかったが、対称性の議論は本来、この d -vector について行われる。

とかける。ただし右辺で μ に関する和はとらない。スピン揺らぎを媒介とするペアリング相互作用の場合、 $V_\mu(q)$ はよい近似の範囲で $V_\mu(q) \propto D(q)$ にとることができ、 $q = Q$ という磁気秩序ベクトル Q でピークをとる。たとえば Hubbard モデルに対する乱雑位相近似では、

$$V_0(q) = U + \frac{3}{2}U^2\chi_s(q) - \frac{1}{2}U^2\chi_c(q), \quad (26)$$

$$V_i(q) = -\frac{1}{2}U^2\chi_s(q) - \frac{1}{2}U^2\chi_c(q), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

となる。ここで

$$\chi_s(q) = \frac{\chi_0(q)}{1 - U\chi_0(q)}, \quad (28)$$

$$\chi_c(q) = \frac{\chi_0(q)}{1 + U\chi_0(q)}, \quad (29)$$

$$\chi_0(q) = -\frac{T}{N} \sum G^0(k+q)G^0(k) \quad (30)$$

である。これから分かるように、スピン揺らぎを媒介とする相互作用は帯磁率を部品にしてできおり、その χ はスピン励起の運動の様子を表している。つまり、 V はスピン励起を交換して、電子間で相互作用していることを表している。この RPA の式で一つ重要なことは、 U の一次と χ_c の項を χ_s の項より小さいと思って無視すると、およそ $|V_0| \simeq 3|V_i|$ となるという点である。これは、シングレットのペアリングに対しては、スピン揺らぎのうち縦揺らぎと二つの横揺らぎの両方が寄与できるのに対して、トリプレットに対しては、横揺らぎはペアリングに寄与できないということからきている。($\Delta_{\uparrow\uparrow}$ に寄与できるのは明らかに $S^z S^z$ のような相互作用だけであり、スピン回転対称性から、各 d_i に対してもこの揺らぎしか効かないことが分かる。)

ごく単純な場合として、 $q = Q$ のスピン揺らぎが非常に強く、 $V(q = Q, i\omega_n) \gg V(q \neq Q, i\omega_n)$ である場合を考えよう。 $V_\mu(q) \simeq v_\mu(i\omega_n)\delta_{q,Q}$ のようにかけるとすると、Eliashberg 方程式は、

$$d_\mu(\mathbf{k}, i\omega_n) = -T \sum_{\omega_{n'}} v_\mu(i\omega_n - i\omega_{n'}) |G(\mathbf{k} - \mathbf{Q}, i\omega_{n'})|^2 d_\mu(\mathbf{k} - \mathbf{Q}, i\omega_{n'}) \quad (31)$$

となる。

[$\mu = 0$ のとき]

RPA の表式より $v_0 > 0$ なので、 $d_0(\mathbf{k} - \mathbf{Q}, i\omega_n) = -d_0(\mathbf{k}, i\omega_n) \cdots$ (S) ならば方程式は成立しやすい。たとえば、反強磁性 $Q = (\pi, \pi)$ に対して $d_0(\mathbf{k}) = \cos k_x - \cos k_y$ であればよい。これは高温超伝導体の場合に対応する。また、 $\mu = 0$ に対しては $Q = 0$ の場合は、(S) は $d_0(k) = -d_0(k)$ となってしまう、偶パリティ性 $d_0(k) = d_0(-k)$ と整合しない。つまり、強磁性スピン揺らぎ ($Q = 0$) はシングレット超伝導を引き起こしにくいということである。

[$\mu = 1, 2, 3$ のとき]

RPA の表式より $v_i < 0$ なので、 $d_i(\mathbf{k} - \mathbf{Q}, i\omega_n) = d_i(\mathbf{k}, i\omega_n) \cdots$ (T) ならば方程式を満足しやすい。これを満たす最も単純な Q は $Q = 0$ で、強磁性スピン揺らぎはトリプレットを引き起こしやすいことが分かる。他にも、 $Q = (\pi, 0)$ のような AF 揺らぎに対しては、 $d_i = \sin k_y$ のようなギャップ関数なら (T) は満たされる。しかしこの Q は、 $|V_0| \simeq 3|V_i|$ であるために、 d_i よりも $d_0 = \sin k_x \sin k_y$ を強く安定化させる傾向にある。

以上より、一般的な傾向として、反強磁性スピン揺らぎの場合にはスピン・シングレットが、強磁性スピン揺らぎの場合にはスピン・トリプレットが好まれることが結論される。もちろん相互作用 V は一般には複雑な q 依存性をもつので、ここで述べた話は極端に単純すぎるが、直感的理解には役立つものである。

- スピン揺らぎのうち、シングレットペアリングに対しては縦揺らぎも横揺らぎも寄与するが、トリップレットペアリングに対しては縦揺らぎしか寄与しない。結果として、 $|V_{\text{singlet}}| \simeq 3|V_{\text{triplet}}|$ となる。
- 一般論として、反強磁性揺らぎはシングレットを、強磁性揺らぎはトリップレットを好む。

3.2.4 スピン揺らぎと超伝導転移温度

磁気量子臨界点近傍においては、スピンの揺らぎが大きく、この揺らぎを媒介にして電子が相互作用しているという描像が成り立つ。この場合、Cooper ペアを形成するためのペアリング相互作用 V も、電子の寿命や繰り込みを与える自己エネルギー Σ_n も、両方ともスピン揺らぎから生じる。前者は文字通り超伝導ペアリングを導くものであるが、後者は超伝導ペアリングを起こしにくくする (対破壊効果) ので、必ずしもスピン揺らぎが強ければ強いほど超伝導転移温度 T_c が高くなるというわけではない。また T_c の大きさは、ペアリング相互作用が特定の対称性をもつギャップ $\Delta(k)$ に対して、Fermi 面上でどのくらい有効的に引力として働くことができるかという問題にも関係しており、物質の詳細にも大きく依存することも忘れてはならない。

「スピン揺らぎの強さ \neq 転移温度の高さ」の例として、Monthoux らによるスピン揺らぎ誘起超伝導の転移温度の計算結果を図 13 に示す。[44] 詳しくはセクション 4 にて議論するが、グラフの縦軸 $T_{\text{SC}}/T_{\text{SF}}$ は超伝導転移温度をスピン揺ら

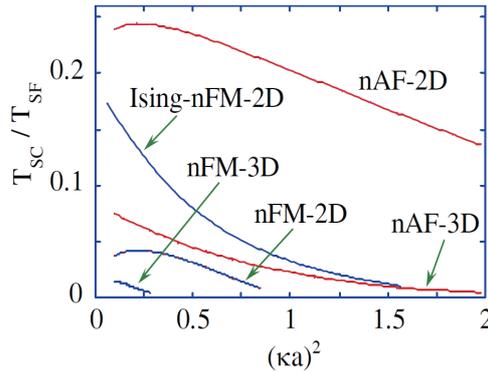


図 13: Monthoux らによる、スピン揺らぎ誘起超伝導の転移温度の計算結果 [44]。縦軸がスピン揺らぎの典型的エネルギー T_{SF} でスケールした転移温度で、横軸は格子間隔 a を単位にした QCP ($\kappa = 0$) からの距離。

ぎの特徴的なエネルギースケールで測ったものである。横軸 $(\kappa a)^2 = (a/\xi)^2$ は、格子定数 a を単位にした QCP ($\kappa = 0$) からの距離を表している。また、nFM- d D は nearly ferromagnetic な d 次元系の略で、nAF- d D は nearly antiferromagnetic な d 次元系のことである。Ising-nFM-2D は、Ising 的な異方性をもつ強磁性スピン揺らぎに対する結果である。このグラフから、Ising-nFM-2D や nAF-3D では $\kappa \rightarrow 0$ で T_{SC} は最大になっているように見えるが、他の場合は必ずしもそうではない。このように、QCP から近ければそれだけ超伝導転移温度が高くなるというわけではなく、 T_{SC} の振る舞いは、系の次元や揺らぎの種類にも依存している。(図 13 の計算は幾分現象論的なモデルを使っているため、よりミクロなモデルを用いると、結果はさらに複雑なものとなりうる。)

また、以上の議論では準粒子の遍歴 f 電子ウエイト z^f のコントロールパラメータ依存性を無視している。Ce 系に圧力をかけた場合には、伝導電子との混成が強まって z^f が増える傾向にある。一方で、加圧によって反強磁性 QCP から遠くなってゆくとペアリング相互作用 V は弱まる。この二つの効果が競合するために、QCP から少し離れたところで超伝導転移温度が最大値をとる可能性も指摘されている [45]。

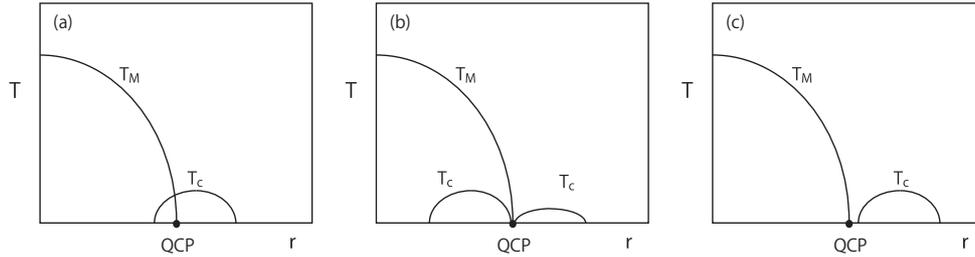


図 14: 磁気量子臨界点のある場合の典型的な相図。縦軸は温度 T 、横軸はコントロールパラメータ r 。 T_M は磁気秩序への転移温度で、 T_c は超伝導転移温度である。

このセクションのまとめ

- QCP に近くスピン揺らぎが強いほど、超伝導転移温度が高いとは限らない。なぜなら、ペアリング相互作用が強くなる一方で、Cooper ペアをつくる電子に対するダンピング（対破壊効果）も強くなり、これらが競合するからである。
- QCP 近傍の転移温度の振る舞いは、系の次元や、揺らぎが反強磁性的か強磁性的かということにも依存する。
- スピン揺らぎの強さだけでなく、コヒーレントな f 電子のウエイトも圧力依存性があるため、超伝導転移温度の圧力依存性は複雑になりうる。

4 磁気的量子臨界点近傍における超伝導

イントロダクションでも紹介したように、重い電子系では磁性相に隣接するように超伝導が発見されることが多い。その多くは超伝導を担う電子と磁性を担う電子は同一のものであり、ひとつの電子系が様々な状態を取ることができる。そして、その状態どうしが互いに関連しあって相図を形成しているところが面白い。磁性と超伝導の関係においても様々なバリエーションがあり、図 14 のように超伝導相が磁性相の中と外に分離しているように見える場合や、磁性相と常磁性相とに超伝導相がまたがっている場合や、常磁性相のみに超伝導相がみられる場合などがある。これらの相図の完全な分類がなされているわけではないが、ここでは強磁性と反強磁性の場合に分けて、超伝導と過渡的磁性の関係について議論する。

4.1 強磁性の場合

このサブセクションでは強磁性量子臨界点近傍の超伝導について議論する。強磁性相近傍で超伝導がみついている物質は U 化合物に多く、 UGe_2 、 UIr 、 URhGe 、 UCoGe などがある。また、重い電子系ではないが、 ZrZn_2 や MnSi は強磁性量子相転移に関連して精力的に研究されてきた。しかしながら、これらの物質のいくつかは δ - T 相図で δ をチューニングしてゆくと 2 次転移が 1 次転移が変わってしまっていて、量子相転移が 1 次となり臨界点が現れない。¹³ 図 15 は UGe_2 、 ZrZn_2 の相図である。これらの強磁性量子相転移は 1 次転移である。また、図 16 は UCoGe と UIr の相図であり、超伝導に隣接する強磁性相の量子相転移は 2 次であると考えられている。1 量子相転移する系に対してはセクション 2 で考えたシナリオはそのままはあてはまらないが、 URhGe では図 17 のように、磁化と垂直な磁場をかけることで量子相転移が 2 次になることが報告されており、その近傍ではやはりスピン揺らぎが強くなっていると考えられる。

¹³強磁性量子相転移は、一般的に 1 次転移となる可能性も指摘されている。

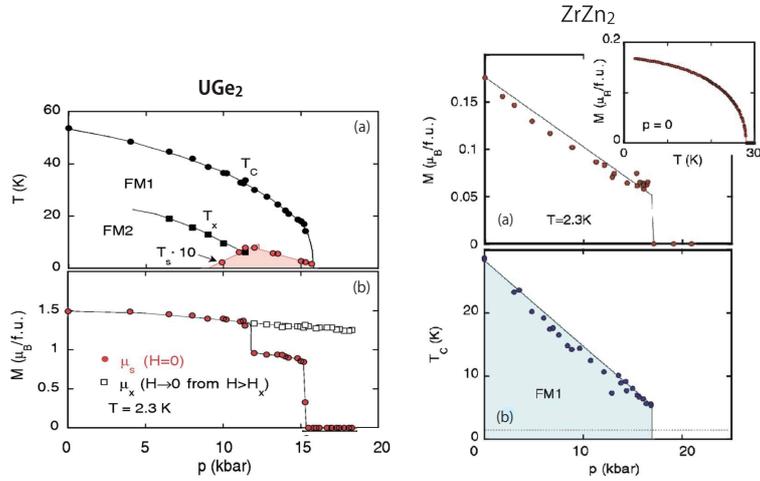


図 15: (左)UGe₂[46]、(右)ZrZn₂[47] の相図と磁化の圧力依存性。両方とも量子相転移は一次である。

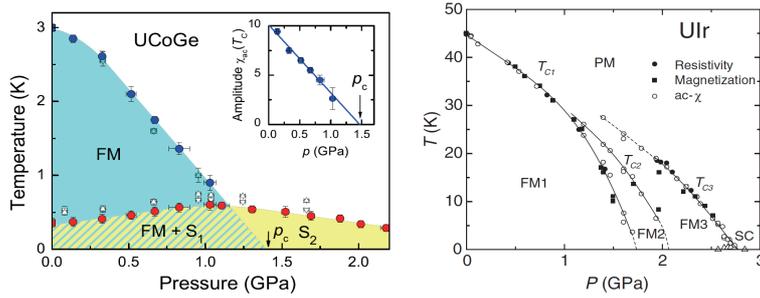


図 16: (左)UCoGe[48]、(右)UIr[49] の相図。UIr では強磁性相転移線がいくつかあるが、 T_{c1} 、 T_{c2} は一次転移、 T_{c3} は二次転移であり、 $\rho \sim T^{5/3}$ が観測されている。

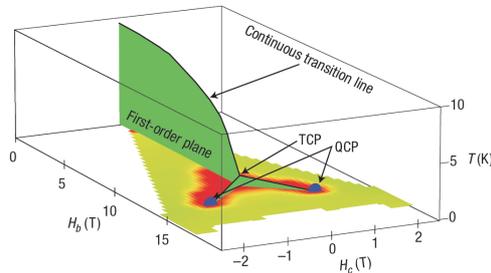


図 17: URhGe の相図 [50]。 $H_c = 0$ で H_b を増やしてゆくと、二次転移が tricritical point(TCP) で終わり、一次転移になる。 H_c をかければ TCP から二次転移線が H_c 方向に伸び、QCP をもつ。

4.1.1 強磁性量子臨界点近傍の超伝導転移温度

強磁性量子相転移近傍の超伝導には、超伝導相が強磁性相の内側だけで観測されているものと、超伝導相が強磁性相と常磁性相にまたがって観測されているものがある。以下では、遍歴強磁性 QCP 近傍における超伝導の発現について議論する。¹⁴

前述のように強磁性スピン揺らぎの場合、ペアリング相互作用 $V(q)$ は $q = k - k' = 0$ にピークをもち、そのため、シングレット超伝導ではなくトリプレット超伝導を起こしやすい。スピン揺らぎの正常自己エネルギーへの寄与は超伝導のパリティに関係ないが、ペアリング相互作用への寄与はパリティに依存しており、トリプレット相互作用の振幅はシングレット相互作用の $1/3$ である。セクション 3 でも述べたが、これは超伝導に寄与できるのは、 $\chi^{\parallel}, \chi^{\perp}$ で表わされる 3 種類のスピン揺らぎのうち縦揺らぎのみで、横揺らぎの 2 つのモードはトリプレット形成には寄与できないためである。このように、スピン揺らぎによるトリプレット超伝導に対しては、正常自己エネルギーに寄与するスピン揺らぎモード数 ($N_{\text{depair}}=3$) がペアリング相互作用に寄与するモード数 ($N_{\text{pair}}=1$) より多いため、対破壊効果が顕著となる。

さらに、強磁性スピン揺らぎがトリプレット超伝導を引き起こしている場合には、その揺らぎが Heisenberg 的であるか、Ising 的であるかによって超伝導転移温度の様子は変わってくる。これは、もしスピン揺らぎが Ising 的なら、もともと揺らぎモードには縦揺らぎしか存在せず $N_{\text{depair}} = N_{\text{pair}} = 1$ となって、対破壊効果が Heisenberg 的揺らぎのときより相対的に弱められるからである。結果として、Ising 的揺らぎの場合の T_c は Heisenberg 的揺らぎの場合の T_c より高くなる。

以上のことは基本的には常磁性相での議論であるが、強磁性相では横揺らぎはスピン波なので超伝導には重要ではなく、超伝導に寄与するスピン揺らぎは Ising 的性格が強い。¹⁵ そのため、常磁性相でスピン揺らぎが Heisenberg 的なときは、強磁性相では横揺らぎモードからの正常自己エネルギーへの寄与 (対破壊) が小さくなり、強磁性相の T_c は常磁性相の T_c より高くなることが期待される。一方、常磁性相でスピン揺らぎが Ising 的な場合には、強磁性相でその Ising 性が強まりはするが正常自己エネルギーはどちらの相でもそれほど変化しないため、 T_c は強磁性相・常磁性相の両方でほぼ同じようになることが期待される。ただしこの議論は、強磁性相と常磁性相での状態密度の変化が無視できるほど小さい場合に限られる。もちろん、磁気相転移に伴う状態密度の変化は物質の詳細に依存する。

Monthoux らは次のようなモデルで、磁気量子臨界点近傍の超伝導の転移温度を常磁性相で解析した [51]。¹⁶

$$S = \sum c_{ks}^{\dagger} \varepsilon_k c_{ks} + S_{\text{SF}}, \quad (32)$$

$$S_{\text{SF}} = \sum -\frac{2}{3}g^2 \left(\frac{1}{2}\chi^{\perp}(q)[S_q^+ S_{-q}^- + S_q^- S_{-q}^+] + \chi^{\parallel}(q)S_q^z S_{-q}^z \right). \quad (33)$$

ここで $\chi^{\perp}, \chi^{\parallel}$ はそれぞれ横帯磁率、縦帯磁率であり、スピン揺らぎが Heisenberg 的なら $\chi^{\perp} = \chi^{\parallel} \equiv \chi$ で、Ising 的なら $\chi^{\perp} = 0, \chi^{\parallel} = \chi$ である。 χ はセクション 2 の式 (6) である。モデルは 2 次元正方格子で定義されており、そのフェルミ面はおおよそ円に近いものである (Sr_2RuO_4 の γ バンドのフェルミ面に近い)。

摂動最低次で計算すると、正常自己エネルギーは常磁性相で、

$$\Sigma_n(k) = \frac{T}{N} \sum \frac{g^2}{3} [\chi^{\parallel}(k - k') + 2\chi^{\perp}(k - k')] G^0(k') \quad (34)$$

である。同じく摂動最低次で Eliashberg 方程式は、 $G = [(G^0)^{-1} - \Sigma_n]^{-1}$ を用いて

$$\Delta(k) = -\frac{T}{N} \sum \left\{ \begin{array}{l} (g^2/3)[\chi^{\parallel}(k - k') + 2\chi^{\perp}(k - k')] \\ (g^2/3)\chi^{\parallel}(k - k') \end{array} \right\} G(k')G(-k')\Delta(k') \quad (35)$$

¹⁴超伝導と局在スピンによる強磁性との関係も古くから研究されている。その場合、超伝導を担っている電子と強磁性を担っている電子が別物である。これと異なり、 UGe_2 などでは、超伝導と強磁性は同じ電子が引き起こしている。

¹⁵縦揺らぎ成分に対しては、だいたい秩序モーメント m が QCP からの距離になり、 m が小さい QCP 近傍では縦揺らぎが超伝導発現の主要な引力となる。もちろん、横揺らぎ成分がスピン波になることは反強磁性の場合も同じである。

¹⁶ここでは論文とは異なる表記を採用した。

となる。上段がシングレット、下段がトリプレットに対する方程式である（このセクションではトリプレットの場合のみを考える）。まず、自己エネルギーから準粒子ウエイトの逆数 $Z(\mathbf{k}, i\pi T) = \left(1 - \frac{\text{Im}\Sigma_n(\mathbf{k}, i\pi T)}{\pi T}\right)$ を求めると、¹⁷ 図 18 のように、強磁性揺らぎの場合には $\kappa \rightarrow 0$ に向かって Z は増大し、準粒子ウエイトは小さくなる。 Z が急激に大きく

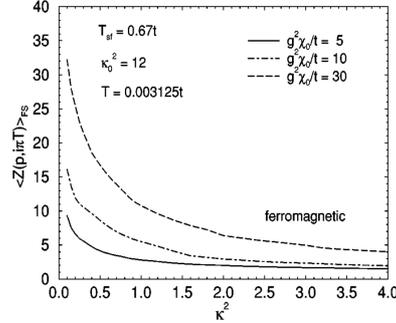


図 18: フェルミ面上で平均した準粒子ウエイトの逆数 Z [51]。

なり始める κ を κ^* とすると、 $\kappa \gg \kappa^*$ で系は Fermi 液体的、 $\kappa \ll \kappa^*$ では非 Fermi 液体的であるといえる。（セクション 2 の一般論によれば、絶対零度で強磁性の場合、 C/T は QCP で発散するのであったが、このことは準粒子ウエイトが QCP でゼロになることと対応している。）QCP $\kappa = 0$ 直上で $T_c > 0$ であるか $T_c = 0$ であるかは、ペアリング相互作用が準粒子繰り込みによる対破壊に打ち勝つほどに強いかどうかによっている。

Monthoux らが上の Eliashberg 方程式を解いた結果によると、Heisenberg 的スピン揺らぎの場合には T_c は図 19(a) のようになる。 κ を小さくしてゆく（臨界点に近づいてゆく）と、ある $\kappa \neq 0$ で T_c は最大値をとり、さらに小さくして

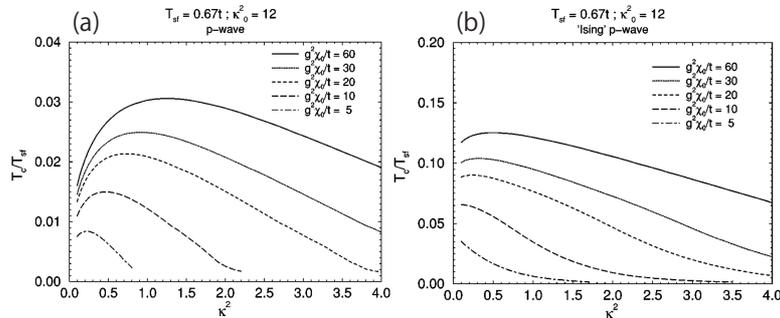


図 19: p 波に対する超伝導転移温度 [51]。 T_{sf}, κ_0 は繰り込まれていないスピン揺らぎのエネルギースケールと長さスケール。(a)Heisenberg 的揺らぎの場合、(b)Ising 的揺らぎの場合。

$\kappa \rightarrow 0$ の極限では T_c は強く抑制されてくる。この T_c の抑制は上述の強い準粒子繰り込みによるもので、彼らの計算では $\kappa = 0$ の QCP 直上での T_c の値は示されていない。

一方 Ising 的スピン揺らぎの場合には、図 19(b) のようになり、正常自己エネルギーに寄与するモードが一つなので、 T_c は Heisenberg 的揺らぎのときよりかなり高い。さらにこのとき、 $\kappa \rightarrow 0$ に向かってゆくときの T_c の抑制は小さく、QCP 直上でも超伝導状態が期待できる。これはすなわち、常磁性状態での超伝導相が強磁性状態においても存在しているであろうことを示している。

このことに関しては、Roussev[52]、Wang[53]、Fujimoto[54] らによってもより詳細に調べられ、Heisenberg 的なスピン揺らぎのときでさえ、非常に低いながらも QCP 直上で $T_c > 0$ であると結論されている。しかし、Heisenberg 的な場

¹⁷これはおおよそ、 $Z^R(\mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\partial \Sigma_n(\mathbf{k}, 0)}{\partial \omega}\right)$ のことである。

合は、 δ の関数としての T_c の基本的振る舞いは Monthoux らの結果と同じように、 T_c が最大をとる $\delta = \delta^*$ より臨界点に近い $\delta < \delta^*$ (NFL 領域) では T_c は急激に減少するため、本当に $T_c > 0$ かどうかはかなり慎重な理論的取扱いを必要とする。また、これらとは異なる理論結果として、超伝導ギャップ形成によるスピン揺らぎへのフィードバック効果を考慮すると、超伝導転移が一次転移になり、QCP 上でも高い T_c をもつという議論もある [55]。

以上は、常磁性側に限った解析であったが、強磁性相においても超伝導転移温度の解析がなされている。(ここでの議論は、強磁性相転移に伴う状態密度の変化が無視できる場合に限る。) 強磁性相では磁化 $M = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2$ のために、並行スピン対の Cooper ペアが強磁性と共存しやすい。(反平行スピン対の可能性が完全に排除されるわけではないが、反平行スピン対は $M \neq 0$ では異なる大きさの Fermi 面間でペアを組まねばならない。) Fay らの議論 [56] によると、Heisenberg 的スピン揺らぎのとき、常磁性相と強磁性相とで T_c は同じくらいの値になると提案されていたが、 UGe_2 、 URhGe では強磁性相の内側でしか超伝導が観測されていない。超伝導と強磁性の共存相に関してもいくつかの提案があるが、最もシンプルな考え方は、強磁性相では横揺らぎがスピン波になって超伝導発現に効かなくなり、縦揺らぎだけが重要になっていると考えることであろう。この考えを基本にした Nevidomskyy の解析 [57] によれば、常磁性相で Heisenberg 的なスピン揺らぎの系において、図 20(a) のように、強磁性相での T_c^{ferro} は常磁性相での T_c^{para} より十倍以上高いと結論されている。上述の物質との関連でいえば、 $T_c^{\text{para}} \ll T_c^{\text{ferro}}$ であるために、強磁性相の内側でしか超伝導が観測されていないということになる。また、Wang らは Ising 的なスピン揺らぎの場合に対する解析も行っており、それによると図 20(b) のように T_c は QCP 直上で最大で、超伝導相は常磁性相・強磁性相の両方に同じくらいの T_c でまたがって存在している。(ただし、Heisenberg 的揺らぎに関しては、Wang らの計算では、強磁性相で揺らぎが Ising 的揺らぎに変化する影響を低く見積もっている。そのため、常磁性相と強磁性相での T_c にそれほど大きな差はない。)

以上の議論は FM QCP が存在する場合の議論であり、 UGe_2 のような 1 次の量子相転移を起こす系では、量子相転移の近傍には、そのままでは議論を適用できないことに注意が必要である。

— このセクションのまとめ —

- 強磁性スピン揺らぎが Heisenberg 的な場合は、超伝導転移温度は QCP 直上で強く抑制される。これは、強磁性揺らぎの場合、 $T = 0$ の QCP において準粒子ウエイトが消失するためである。
- Heisenberg 的揺らぎの場合は、強磁性相では横揺らぎがスピン波になって対破壊に効かなくなるので、強磁性相での超伝導転移温度は常磁性相での転移温度より高い。
- Ising 的な揺らぎの場合は、強磁性相でも常磁性相でも、縦揺らぎ成分だけが重要なので、超伝導転移温度は二つの相をまたいで滑らかにつながる。

4.1.2 UCoGe における上部臨界磁場

UCoGe において最近、磁気量子臨界点と超伝導の関係性を示す、面白い実験が報告されたので紹介する [48]。UCoGe は常圧で $T_{\text{Curie}} \sim 3\text{K}$ の Ising 的遍歴強磁性体であり、同じく常圧で $T_{\text{sc}} \sim 0.5\text{K}$ で超伝導を示す。加圧してゆくと、 $p_c = 1.4\text{GPa}$ (外挿値) あたりで強磁性が消失し、QCP をもつ。ただし、低温で 2 次転移が 1 次転移に変わり、QCP をもたない可能性も排除されてはいない。モーメントの大きさは $0.07\mu_B$ と小さく、その向きは c 軸方向である。この物質における上部臨界磁場 H_{c2} の測定によると、図 16(a) のように、 a 軸方向の H_{c2}^a は臨界圧力のあたりで巨大な値をとり、 $T_{\text{SC}} \sim 0.6\text{K}$ に対して $H_{c2}^a(0) \sim 15\text{T}$ にもなる。また、 H_{c2}^a 曲線は通常よく見られる上凸形ではなく、下凸形である。一方、 c 軸方向の H_{c2}^c は上凸形で、その値も 1T 以下である。 H_{c2}^a の圧力依存性とその巨大さは、超伝導が FM QCP と深く関係していることを示しており、超伝導相に隠された QCP が超伝導を強固なものにしている証拠といえるだろう。しかし、これとは別のグループによる H_{c2} の測定結果では a 軸方向での H_{c2} が巨大な値であることは同じだが、その詳細は上述のものとは少し異なっており [58]、今後の実験的な進展が期待される。

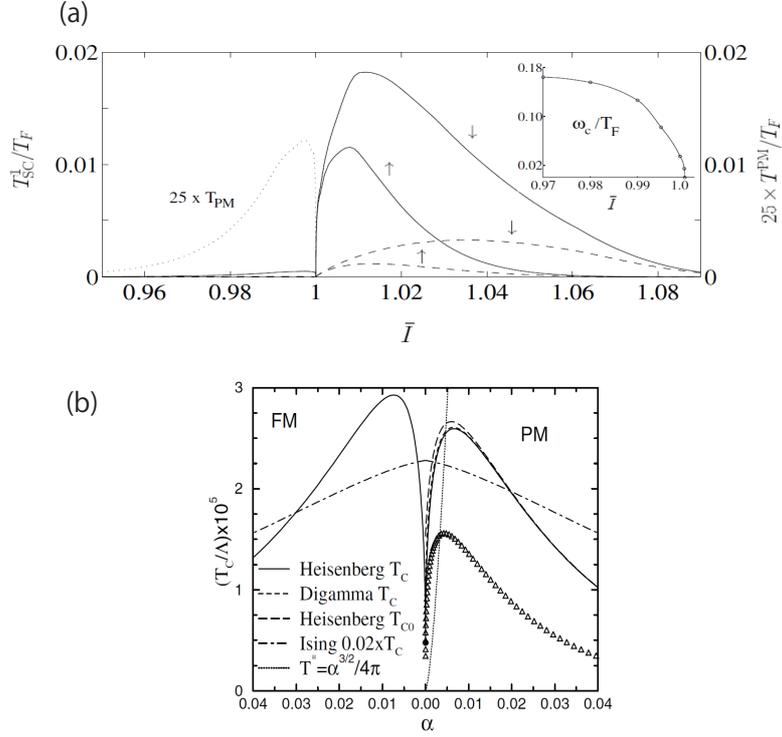


図 20: p 波に対する超伝導転移温度。(a)Heisenberg 的揺らぎにおける、 T_{SC}^1 は強磁性相での超伝導転移温度、 T_{PM} は常磁性相での転移温度。 T_F はフェルミ温度。 \bar{I} はコントロールパラメータで、 $\bar{I} < 1$ が常磁性相、 $\bar{I} > 1$ が強磁性相に対応している。 $\bar{I} > 1$ では、メジャースピンとマイナースピンの各成分について計算している。インセットは相互作用の cutoff ω_c の \bar{I} 依存性 [57]。(b)Heisenberg 的揺らぎと Ising 的揺らぎの場合それぞれの超伝導転移温度。 Λ はエネルギー cutoff。 $\alpha = 0$ が QCP に対応している。Heisenberg の T_c が三つあるが、理論の計算の詳細が異なるだけで、基本的には同じものである。の線は、他の線と相互作用の大きさが異なる。 T^* は、カノニカル・フェルミ液体領域と異常フェルミ液体領域を分けるクロスオーバー線で、セクション 2 での $r^{\nu z}$, $\nu = 1/2, z = 3$ に対応する [53]。

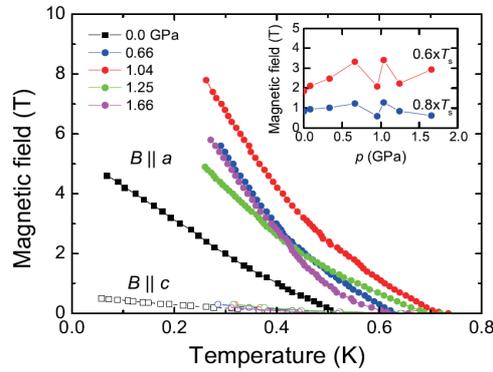


図 21: UCoGe の上部臨界磁場。白抜きのデータは $H \parallel c$ で、塗りつぶしの印のデータは $H \parallel a$ である [48]。

このような巨大な H_{c2} に関する実験と理論は、セクション 4.2.3 でも議論する。

4.2 反強磁性の場合

このセクションでは反強磁性量子臨界点近傍の超伝導について議論する。超伝導と反強磁性との関係は重い電子系だけでなく、高温超伝導体においても幅広く研究されてきた。高温超伝導では AF 相は Mott 絶縁体であったのに対し、重い電子系では AF は遍歴的であることが大きな違いであるが、どちらの場合も常磁性相においては電子は遍歴的であり、スピン揺らぎの解析にはセクション 2 のシナリオを用いることができる。

反強磁性量子臨界点近傍の超伝導の代表例としては、重い電子系で初めて超伝導が見つかった物質でもある CeCu_2Si_2 が有名である。また、Fulde-Ferrel-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態という空間的に超伝導ギャップが変調しているような状態に関連してさかんに研究されている CeCoIn_5 や、同じ CeMIn_5 系の CeRhIn_5 、 CeIrIn_5 も反強磁性量子臨界点近傍の超伝導体である。さらには、結晶構造に空間反転対称性をもたないような超伝導体である CeRhSi_3 、 CeIrSi_3 でも、反強磁性相の近傍で超伝導が起こっている。 CeCoIn_5 と $\text{Ce}(\text{Rh},\text{Ir})\text{Si}_3$ については、セクション 4.2.2 と 4.2.3 で解説する。

4.2.1 反強磁性と超伝導

[反強磁性と超伝導の共存可能性]

反強磁性のスピン揺らぎの場合には、反強磁性秩序が波数依存性をもつために、強磁性の場合と少し異なる注意が必要となる。ここでは、超伝導と磁気秩序を担う電子が同一の遍歴的なものである場合を念頭に、磁気秩序がスピン密度波 (spin density wave=SDW) の場合を考える。以下では、SDW ギャップと超伝導ギャップがどのようなときに競合し、どのようなときに競合しないかを議論する。

反強磁性と強磁性の端的な違いは、オーダーパラメータが波数依存性をもつかもたないかである。強磁性の場合は磁化は、フェルミ面を \uparrow スピンに対するものと \downarrow スピンに対するものの二つに分裂させるが、 k 空間で一様である。この場合、超伝導はそれぞれのフェルミ面に対して起こることになる。しかし反強磁性の場合には、秩序ベクトル Q によるブリルアンゾーンの折りたたみとフェルミ面の交差する、特定の k 点付近にギャップができる。これによってフェルミ面に異方的なギャップ構造ができることになる。一方、異方的超伝導によっても、フェルミ面の上で k に依存する形でギャップができる。もし、SDW と SC の二つのギャップがフェルミ面の同じ場所で有限になろうとするならば、SDW と SC は競合することになる。もし異なる場所で有限になろうとするならば、SDW と SC は共存できるだろう。したがって、この二つの相が共存できるかどうかは、オーダーパラメータの波数依存性とフェルミ面の構造に大きく依存していることになる。(もちろん、それぞれのオーダーパラメータの振幅の相対的大きさにも依存する。) たとえば 2 次元正方形格子の $Q = (\pi, \pi)$ の場合には、Kato らの平均場理論 [59] により、 $d_{x^2-y^2}$ 超伝導と SDW のオーダーパラメーターは、Fermi 面上のほとんど異なる領域でギャップを開けて共存してしていることが示されている (図 22)。

SDW と SC の共存可能性を一般的に扱うことは難しく、それぞれのギャップによる凝縮エネルギーの大小は物質の詳細に強く依存する。しかし、SDW ギャップが Q によるブリルアンゾーンの折りたたみと関係していること、また、SC ギャップは運動量移行 Q の散乱によって誘起されていることを考えると、二つのギャップの共存可能性について定性的な議論ができる。Konno らは、超伝導状態にある系に何かしらの理由で SDW が生じたときに、自由エネルギーの中の、その二つの相の競合性を表す部分が正・負のどちらになるかによって SDW と SC が共存可能かどうかを調べた [60]。Konno らの理論で念頭においているのは、超伝導を担う電子と磁性を担う電子が同一のもので、磁気モーメントの大きさが小さいような物質である (たとえば UPt_3 ではモーメントは $0.02\mu_B$ くらいである)。したがって、超伝導オーダーパラメーター Δ と秩序ベクトル Q の SDW のオーダーパラメーター M_Q との両方に関して自由エネルギーを展開することが可能となる。超伝導・常磁性状態における帯磁率 χ を用いて、SDW のオーダーパラメーター M_Q に対する自由

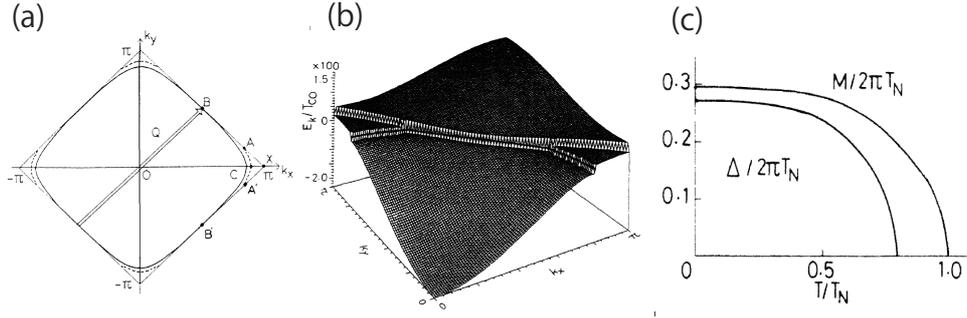


図 22: (a) フェルミ面。矢印はネスティングベクトル。(b) 超伝導と SDW が共存しているときの分散。フェルミ面上では、超伝導は主に (a) の A 点から A' 点あたりでギャップを開いており、SDW は主に (a) の B 点のまわりでギャップを開いている。(c) SDW と超伝導のギャップの振幅の温度依存性。低温では両方のオーダーパラメータが共存している [59]。

エネルギーの 2 次 (この中に Δ と M_Q のカップリングの最低次が現れる) は、

$$F = \frac{1}{2} M_Q [\chi^{-1}(Q) - I] M_Q$$

となる。I は電子間相互作用の強さである。ここで、SDW オーダーパラメータに対する有効磁場 B_Q を $M_Q^i = \sum \chi_{ij}(Q) B_Q^j$ で定義する。F を d-vector d_μ と B_Q のカップリングの最低次まで展開すると、

$$F_{\Delta M} = (\gamma_1 + \gamma_2) \langle d_0(\mathbf{k}) d_0^*(\mathbf{k}) + \mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{k}) \rangle + F_{sM} + F_{tM}, \quad (36)$$

$$F_{sM} = \tilde{\gamma}_2 \langle d_0(\mathbf{k}) d_0^*(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \rangle B_Q \cdot B_Q, \quad (37)$$

$$F_{tM} = \tilde{\gamma}_2 \{ [\mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot B_Q] [\mathbf{d}^*(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \cdot B_Q] - [\mathbf{d}(\mathbf{k}) \times B_Q] [\mathbf{d}^*(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \times B_Q] \} \quad (38)$$

となる。 $\langle \dots \rangle$ は Fermi 面上での平均である。 $\gamma_1, \gamma_2, \tilde{\gamma}_2$ は定数で、ここではあらわな表式は示さないが、すべて正の値をとると考えられている。 F_{sM}, F_{tM} はそれぞれシングレット超伝導と SDW、トリプレット超伝導と SDW のカップリングを表しており、これらの正負によって、それらの共存可能性を定性的に議論できる。

まずシングレットの場合には、 $\tilde{\gamma}_2 > 0$ を考慮すると、 $d_0(\mathbf{k}) d_0(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) < 0$ であれば $F_{sM} < 0$ となり、超伝導と SDW が共存する方がエネルギーが低くなり、安定ということになる。最も安定となるのは $d_0(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) = -d_0(\mathbf{k})$ の場合であるが、これはまさにセクション 3 で議論した、波数 $q = \mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{Q}$ にピークをもつペアリング相互作用によってシングレット超伝導が引き起こされるときにも成立する関係式である。したがって、 $q = \mathbf{Q}$ にピークをもつ AF スピン揺らぎが常磁性相でシングレット超伝導の引力となる場合には、秩序ベクトル Q で SDW 転移を起こした反強磁性相でもそのシングレット超伝導と SDW は共存可能であることになる。これは先に述べた、 $d_{x^2-y^2}$ 波超伝導と $Q = (\pi, \pi)$ の SDW が共存できるという Kato らの具体的な計算結果ともコンシステントである。(実際、Kato らも $d_0(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) = -d_0(\mathbf{k})$ が重要な条件となっていることを論文の中で述べている。) 一般のフェルミ面においても上の関係式は、フェルミ面上で二つのオーダーパラメータが共存できるための目安になる。

トリプレットの場合には、 $d(\mathbf{k})$ の波数空間における Q 並行移動に関する対称性だけでなく、有効的磁場 B_Q (普通は $B_Q \parallel M_Q$) との相対的な向きも重要になってくる。 F_{tM} から、次の二つの場合にトリプレット超伝導と SDW の共存状態が安定であることが分かる。(I) $d \parallel B_Q, d(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \simeq -d(\mathbf{k})$ 、(II) $d \perp B_Q, d(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \simeq d(\mathbf{k})$. セクション 3 の常磁性相での議論によれば、 $d(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) \simeq d(\mathbf{k})$ は波数 $Q \neq 0$ でピークをもつ AF 揺らぎによる相互作用と相性がよい。しかし、 d ベクトルの向きはスピン軌道相互作用のような $SU(2)$ 対称性を破るようなものが決めるが、それによって d が SDW の M_Q と垂直に向けられるとは限らない。したがって、AF 揺らぎの場合に条件 (II) を満足することは、シングレット超伝導のときほどには簡単ではない。しかしトリプレットにおいても、上の条件式が満たされる場合には、SDW と SC がフェルミ面上の異なる k 点でギャップを開いてオーダーパラメータが共存する可能性が高い。

以上の議論は、二つのオーダーパラメーター M_Q と $d_\mu(\mathbf{k})$ の k 空間における整合性に注目して、その共存可能性を調べるものであった。しかし、磁気秩序相の中でのスピン揺らぎでどれだけ超伝導を誘起できるのか、または常磁性相でスピン揺らぎが誘起した超伝導状態の中でも磁性は秩序化するのかという問題は、系の詳細に大きく依存する。強結合性まで考慮したときには、どちらかのオーダーパラメータだけでほとんどフェルミ面の全体を覆ってしまう可能性もある。このようなフィードバック効果と相の安定性についての一般的な認識は、まだ確立していないようである。

[常磁性相における超伝導転移温度]

常磁性相においても T_c の定量的な見積もりのためには、強磁性の場合と同じように強結合効果による補正が必要である。しかし、反強磁性スピン揺らぎの場合には、ペアリング相互作用に寄与するスピン揺らぎのモード数と自己エネルギーに寄与するモード数が同数なので、強磁性のときほど対破壊効果が顕著ではない。一般に、反強磁性揺らぎの場合は、QCP に近いほど超伝導転移温度は高くなる傾向がある。実際、セクション 3 で紹介した Monthoux らの計算によれば、3次元の場合の T_c は $\kappa = 0$ で最大で、2次元では $\kappa \simeq 0$ あたりで減少はするものの $\kappa = 0$ での値は $T_c > 0$ で大きな値をとる。

また、Kondo らは、SCR 理論によってスピン揺らぎを取り入れて Eliashberg 方程式を解いた [61]。この理論では、スピン揺らぎを $\chi^{-1}(\mathbf{q}, 0) \sim \xi^{-2} + [(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{Q}_\perp)^2 + r(\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{Q}_\parallel)^2]$ のように表してスピン揺らぎの次元性を r によってパラメトライズし、2次元正方格子モデルで T_c や T_N などを計算している。揺らぎが完全に2次元的な場合 ($r = 0$) でも、3次元性がある場合 ($r \neq 0$) でも、図 23 のように、 T_c の振る舞いに大きな変化はない。また、 T_c はおよそ $y_0 \simeq 0$ (QCP 上) で最大をとる。

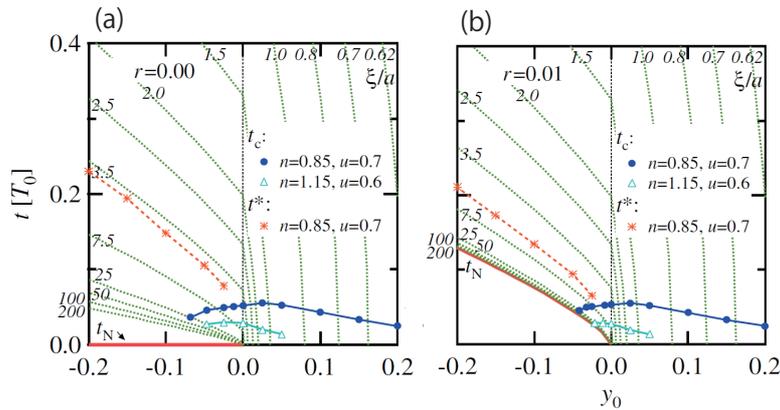


図 23: (a) 2次元の揺らぎ ($r = 0$) と (b) 3次元の揺らぎ ($r = 0.01$) の場合の超伝導転移温度 t_c 。等高線は SCR 理論から計算された ξ/a 、 t^* は状態密度から決めた擬ギャップの現れる温度。 u は電子間相互作用の大きさ、 y_0 はコントロールパラメータで $y_0 = 0$ が QCP に対応する [61]。

- SDW と超伝導は、お互いのオーダーパラメーターが、 k 空間上でうまく住み分けができるときには共存しやすい。
- 強結合効果まで考慮すると、SDW と超伝導が共存可能かどうかは物質の詳細に依存する。
- 反強磁性スピン揺らぎの場合、ペアリングに寄与する揺らぎのモード数と対破壊に寄与するモード数とが同じなので、基本的には QCP に近いほど超伝導転移温度が高くなる傾向がある。(2次元では対破壊の効果が顕著で、QCP から少し離れたところで超伝導転移温度は最大となりやすい。)

4.2.2 CeCoIn₅ における反強磁性揺らぎによる強結合超伝導

このセクションでは、CeCoIn₅ において観測されている強結合超伝導について議論する。図 24(a) はその結晶構造である。CeCoIn₅ は比熱係数 $\gamma \sim 350 \text{ mJ/mol K}^2$ の重い電子系超伝導体であり、常圧で $T_c = 2.3 \text{ K}$ で超伝導を示す。圧力を加えてゆくと T_c が上昇し 1.5 GPa あたりで最大となり、さらに圧力を大きくすると T_c は下がり、3.5 GPa くらいで $T_c = 0$ となる。 T_c が上昇している圧力領域では電気抵抗は $\Delta\rho \sim T$ のように T に線形で、この系が 2 次元反強磁性量子臨界点近傍にあることを示している。また、NMR/NQR $1/T_1 \sim T^{1/4}$ は Fermi 液体で期待される Korringa 則からずれた振る舞いであり、比熱でも $C \sim -T \ln T$ のような 2D AF QCP 特有の振る舞いが観測されている。CeCoIn₅ に関連して、Co を Rh や Ir に置換した CeRhIn₅、CeIrIn₅ も広く研究されており、それらに対する実験結果からも CeCoIn₅ が AF QCP 近傍に位置しているということがわかる。図 24(c) は $\text{CeM}_x\text{M}'_{1-x}\text{In}_5$ ($M, M' = \text{Co}, \text{Rh}, \text{Ir}$) の相図である [64]。CeCoIn₅ の圧力-温度相図には反強磁性相が見えていなかったが (図 24(b))、他のチューニングパラメータ (ここでは x

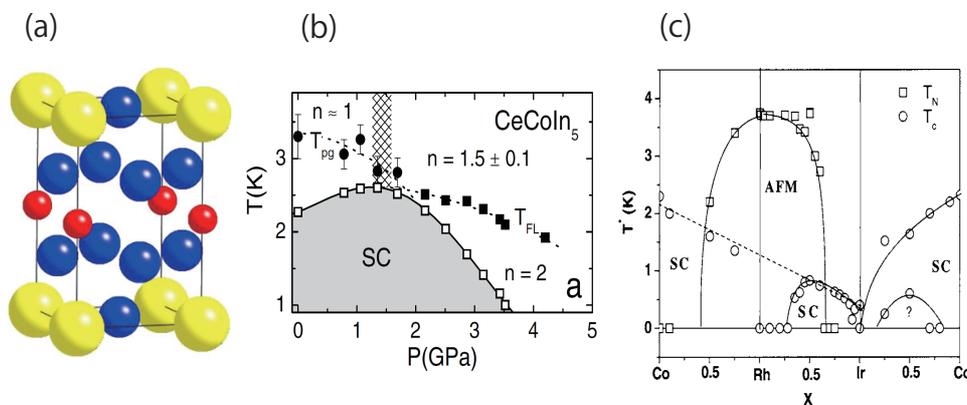


図 24: (a) CeCoIn₅ の結晶構造。大きい球から順に Ce, In, Co [62]。 (b) CeCoIn₅ の圧力・温度相図。 n は電気抵抗 $\Delta\rho \sim T^n$ のべき [63]。 (c) Ce(Co,Rh,Ir)In₅ の相図。 [64]。

のこと)を変えてやれば、"Ce-115" という一つの系の相図の中には反強磁性相があり、このオーダーに関連する揺らぎが超伝導を引き起こしていると解釈できる。この CeCoIn₅ における超伝導ギャップは、たとえば、比熱や $1/T_1$ が $C \sim T^2$ 、 $1/T_1 \sim T^3$ のような振る舞いをするからラインノードをもつと考えられている [65]。さらに、角度分解熱伝導率測定によれば、その対称性は $d_{x^2-y^2}$ であることが指摘されている [66]。これらとは別に、CeCoIn₅ の超伝導は強結合超伝導であることが、比熱のジャンプの測定から示されている [67]。図 25 のように $T = T_c$ における比熱ジャンプは、 $\Delta C/\gamma T_c = 4.5$ で BCS 弱結合理論から導かれる値 1.43 よりはるかに大きい。これは、強いペアリング相互作用のため

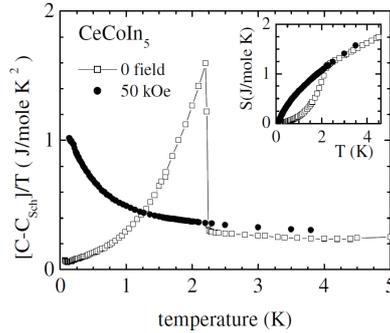


図 25: (a)CeCoIn₅ の比熱測定の結果 [67]。インセットはエントロピー。白丸はゼロ磁場の超伝導状態に対するもので、黒丸は *c* 軸方向に 50kOe の磁場をかけて常伝導状態にした場合のもの。

にギャップの振幅が大きくなるのに対し、準粒子間の非弾性散乱によって超伝導の発現が妨げられて T_c が抑えられるためであり、強結合の度合の指標になっている。以下では、CeCoIn₅ の比熱についての理論を紹介する。

Ikeda らは、超伝導状態におけるギャップの温度依存性と比熱を、2次元正方格子 Hubbard モデルを用いて fluctuation exchange approximation (FLEX) によって解析した [68]。転移温度以下での比熱を求めるには、まず $T \leq T_c$ で非線形 Eliashberg 方程式 (13) からギャップを self consistent に求め、Dyson-Gorkov 方程式によって求まる Green 関数 \mathcal{G} を用いてエントロピー

$$S = -\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{T}{N} \sum_k \text{Tr} \ln \mathcal{G}(k) \right)$$

を計算する。この \mathcal{G} は、常伝導相ではスピン揺らぎによる正常自己エネルギー Σ_n のみを含み、超伝導状態ではさらに異常自己エネルギー（ギャップ関数） Δ を含む。図 26(a) は $T \leq T_c$ での $\Delta(T)$ の温度依存性で、相互作用の大きさ U

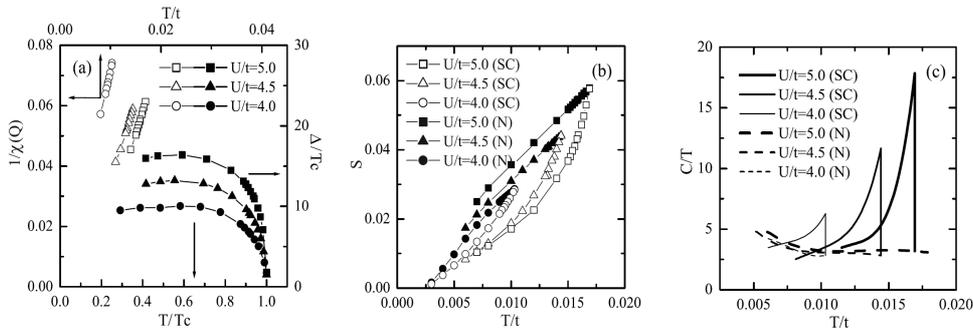


図 26: CeCoIn₅ に対する (a) $\Delta(T)$ 、(b) エントロピー、(c) 比熱の計算結果 [68]。 U, t はそれぞれクーロン相互作用の強さと理論のエネルギー単位。

が大きくなるほど (AF QCP に近づくほど) Δ/T_c が大きくなり、BCS 理論から期待される値 $\Delta/T_c \simeq 1.76$ を超えていることが分かる。これは、 $T < T_c$ でギャップが開くためにスピン揺らぎの $\omega \leq \Delta(T)$ 成分が抑えられて非弾性散乱が減り、準粒子のダンピングが弱められるからである [69, 70]。(スピン揺らぎの低エネルギー部分是对破壊効果を導く [71] ので、 $\Delta \neq 0$ によるスペクトルの変化が重要だが、ペアリング相互作用 V に対してはそうではない。 V はスピン揺らぎのエネルギーカットオフ Γ 以下のエネルギーの積分で効くため、 $\omega \ll \Gamma$ であれば、 V はそれほど Δ の影響をうけない。) このような大きな Δ/T_c は強結合超伝導体に特徴的な現象で、高温超伝導体においても研究されてきた。また、同じよ

うなギャップの増強は electron-phonon 系の conventional な超伝導体でも知られている [72]。計算された Σ_n, Δ を用いてエントロピーを求めると図 26(b) のように、AF QCP に近づいて超伝導が強結合的になるほど、 $T \simeq T_c$ 付近で、正常状態のエントロピーと超伝導状態のエントロピーの傾きの差が大きくなってゆくことが分かる。これを微分して比熱 $C = T \frac{\partial S}{\partial T}$ を求めると図 26(c) のようになり、大きな比熱のとび $\Delta C / \gamma T$ を示す。 $U/t = 5.0$ での値を $\gamma = \left(1 - \frac{\partial \Sigma_n(0)}{\partial \omega}\right)$ でわると、 $\Delta C / \gamma T_c = 4.6$ という、実験値 4.5 に近い値が得られる。これは BCS 弱結合理論での値 1.43 よりはるかに大きく、CeCoIn₅ が反強磁性量子臨界点近傍の強結合超伝導体であることを示している。このような大きな比熱のジャンプは、強結合超伝導体の一般的な特徴である。

また、一般的に、大きな比熱のとびは大きな軌道極限磁場 H_{orb} とも関係している。なぜなら、 H_{orb} 直上の Ginzburg-Landau 理論の自由エネルギー

$$\Delta F = \frac{1}{8\pi} H_{\text{orb}}^2(T)$$

より、

$$\Delta C = \frac{T}{4\pi} \left[H_{\text{orb}} \frac{d^2 H_{\text{orb}}}{dT^2} + \left(\frac{dH_{\text{orb}}}{dT} \right)^2 \right]$$

となるからである。¹⁸ そのため、 $T = 0$ での H_{orb} と Pauli 極限磁場 H_P との比である Maki パラメータ $\alpha_M = \sqrt{2} H_{\text{orb}}(0) / H_P(0)$ も、強結合超伝導体では大きくなる。(Pauli 極限磁場 $H_P(0) = \sqrt{\frac{2N(0)\langle |\Delta|_k^2 \rangle_{\text{FS}}}{\chi_n(0) - \chi_s(0)}}$ も強結合効果で大きくはなるが、その増大の割合は軌道極限磁場のそれより小さい。) 一般に、Maki パラメータが大きいと Fulde-Ferrel-Larkin-Ovchinnikov 状態が安定化しやすい。

— このセクションのまとめ —

- CeCoIn₅ は 2 次元反強スピン揺らぎの QCP 近傍に位置している。
- CeCoIn₅ の超伝導はこの揺らぎによって誘起され、その対称性は $d_{x^2-y^2}$ であると考えられている。
- 比熱のとびは $\Delta C / \gamma T_c = 4.5$ にもなる。これは BCS 平均場理論から期待される値 1.43 よりはるかに大きく、CeCoIn₅ が強結合超伝導体であることを示している。このような大きなジャンプは、強結合超伝導体の一般的な特徴である。
- 一般に、強結合超伝導体では軌道極限磁場が大きい。

4.2.3 CeIrSi₃, CeRhSi₃ における上部臨界磁場

本節では、いわゆる空間反転対称性のない系である、CeRhSi₃ [73]、CeIrSi₃ [74] における量子臨界点近傍での超伝導について解説する。二つの物質の結晶構造は図 27 のようになっており、 c 軸方向に関する鏡映反転対称性がない。線形比熱係数はおよそ $\gamma \sim 120 (\text{mJ mol} / \text{K}^2)$ である。両物質とも低圧側では反強磁性状態であるが、加圧してゆくと圧力誘起で超伝導が発現することが知られており、それらの転移温度の最大値は CeRhSi₃ に対して $(T_N, T_c) \sim (1.6, 1.1) \text{K}$ ほどであり、CeIrSi₃ に対して $(T_N, T_c) \sim (5, 1.6) \text{K}$ くらいである。

これらの物質で非常に面白いものは上部臨界磁場 H_{c2} であり、図 28 は H_{c2} の実験結果である [76, 77]。 H_{c2} には、二つの物質で共通して次のような特徴がある。(1) T_c が 1K ほどなのに対して、 H_{c2} の最大値は 30T にも達するほど巨大であり、(2) H_{c2} 曲線は下凸の形をしており、(3) 圧力に敏感である。30T を超えるこの H_{c2} は、これまでに見つかっている重い電子系超伝導体の中で最大のものであり、CeRhSi₃、CeIrSi₃ における超伝導が強結合超伝導であることを示唆している。さらにその圧力依存性を相図と照らし合わせて眺めてみると、反強磁性の QCP が位置すると予想され

¹⁸ 軌道極限磁場は $H_{\text{orb}} \sim \phi_0 / \xi_{\text{sc}}^2$ であるから、 H_{orb} が大きいことは、超伝導のコヒーレンス長 $\xi_{\text{sc}} \sim v_F / \Delta$ が短いことに対応する。

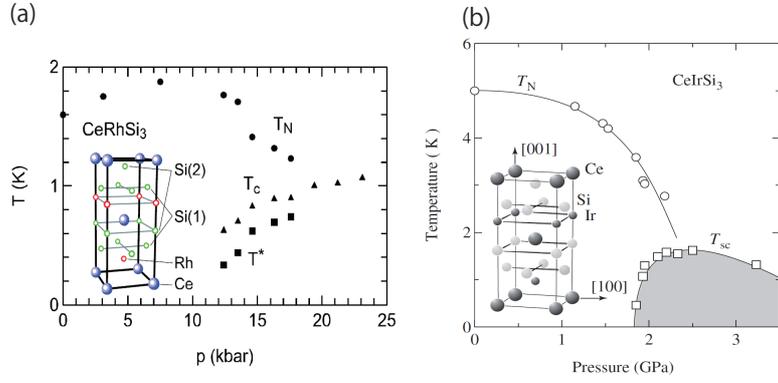


図 27: (a)CeRhSi₃[73]、(b)CeIrSi₃[75] の圧力・温度相図と結晶構造。

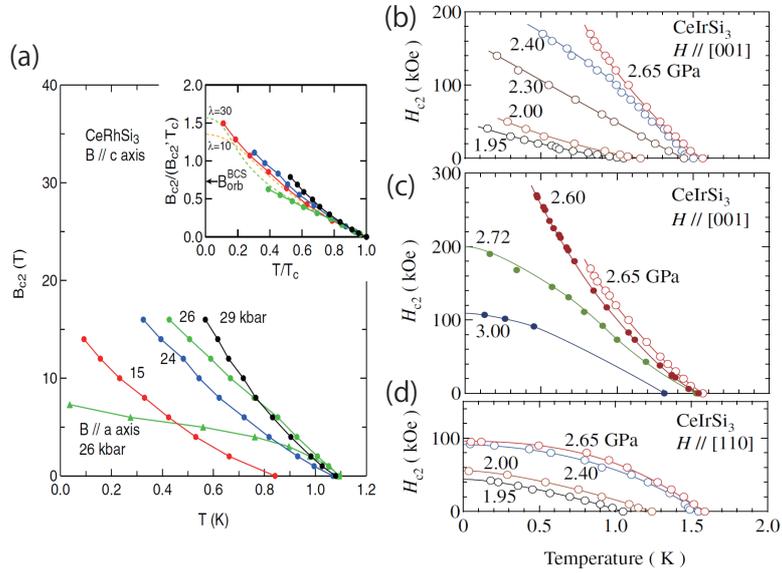


図 28: (a)CeRhSi₃[76]、(b)~(d)CeIrSi₃ [77] の H_{c2} 。 H_{c2} は、 $H \parallel z$ に対しては強結合的振る舞いを示し、 $H \perp z$ に対しては普通の振る舞いを示す。

る圧力 P_c 付近で H_{c2} の大きな増強が起こっており、超伝導の起源としてスピン揺らぎが重要になっていることが考えられる。また、CeIrSi₃ に対して行われた熱容量の測定においても $T = T_c$ で非常に大きなジャンプが観測されており、その大きさは圧力に敏感で $p = p_c$ 付近で最大になっている [78]。このことも CeRhSi₃、CeIrSi₃ における超伝導がスピン揺らぎによる強結合超伝導であることに対する根拠になっている。また、横磁場に対する H_{c2} は縦磁場のような異常な振舞いは見せず、その値も ($T_c \sim 1\text{K}$ からすればまだ大きい) せいぜい 10T ほどで、 c 軸の場合との比は $H_{c2}^\perp/H_{c2}^\parallel \sim 1/3$ で大きな異方性がある。したがって問題は、 H_{c2}^\parallel の異常な振舞いはどのようにして起こるのか、磁場方向による大きな異方性はどのように理解されるべきなのかということになる。

Tada らは、超伝導はスピン揺らぎによって引き起こされているというシナリオにたつて、この系における H_{c2} を調べた [79]。モデルは、

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_{\text{SF}}, \\ S_0 &= \sum_{ks} c_{ks}^\dagger (-i\omega_n + \varepsilon_k) c_{ks} + \sum_{kss'} c_{ks}^\dagger \alpha \mathcal{L}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ss'} c_{ks'}, \\ S_{\text{SF}} &= - \sum_q \frac{2g^2}{3} \chi(q) \mathbf{S}_q \cdot \mathbf{S}_{-q}, \end{aligned} \quad (39)$$

である。空間反転対称性のない系では、図 27 の結晶構造からも予想されるようにユニットセル内で各イオンからのポテンシャルが完全には打ち消しあわず、結晶内に有限の電場 E が残る。そのために、相対論的效果によって電子は $(E \times \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ のようなスピン軌道相互作用を感じる。結晶中における SO 相互作用の具体的な形は物質の詳細によるが、結晶の対称性によって、tetragonal なら Rashba 型、cubic なら Dresselhaus 型といわれるタイプの SO 相互作用となる。運動項の第二項はこのスピン軌道相互作用をあらわしており、CeRhSi₃、CeIrSi₃ は tetragonal なので、SO 相互作用を表す関数 \mathcal{L} は Rashba 型

$$\mathcal{L}(\mathbf{k}) = (\sin k_y, -\sin k_x, 0) \quad (40)$$

となる。 z 成分がゼロであることは、結晶が z 軸方向で反転中心を欠いているため、この xy 方向と z 方向の異方性が以下で説明する H_{c2} の異方性と密接に関係している。

相互作用は反強磁性の QCP 近傍におけるスピン-スピン相互作用であり、それを特徴付ける帯磁率 χ は現象論的に導入する。つまり、セクション 2 で紹介した式 (6) を用いる。この $\chi(q)$ の波数依存性は中性子散乱実験から決定さる。また、温度・圧力依存性は NMR $1/T_1$ の結果から、

$$\xi(T) \propto \frac{1}{\sqrt{T + \theta}} \quad (41)$$

のような Curie-Weiss 形をとり、3D AF 的な揺らぎであることが分かっている。 θ は臨界圧力から測った圧力 $(p - p_c)/p_c$ に対応しており、 $T \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$ が QCP に対応するということである。また、このモデルでは常磁性の状態しか記述できないため、反強磁性と超伝導が共存している可能性のある $P < P_c$ の領域については議論の範囲外である。

このモデルで自己エネルギーとペアリング相互作用を $g^2 \chi_0$ の最低次で評価し、外場による Landau 量子化を考慮して Eliashberg 方程式を解くと、次のような結果が得られる。すなわち、 $H \parallel \hat{z}$ の場合には図 29(a) のように H_{c2} は (1) 最大で 30T を超えるほどに巨大で、(2) 下凸の形をしており、(3) 圧力 (= θ) 依存性が大きい。これは実験結果をよく説明する。このような結果を導く主なポイントは 2 つある。ひとつは、 $\alpha \gg \Delta$ のスピン軌道相互作用のために c 軸方向の磁場に対して、Pauli 極限磁場 H_P^\parallel が実質的に無限大になっていることである。これは Rashba 超伝導体に特有であり、超伝導がシングレット的であるかトリプレットのであるかによらず常に成立する。もうひとつは、強結合効果である。スピン揺らぎはペアリング相互作用 V と準粒子ダンピング $\tau^{-1} = \text{Im}\Sigma$ の両方の効果をもたらすが、その温度依存性は対照的で、 $T \rightarrow 0$ とともに相互作用 $V \propto \xi^2(T)$ は大きくなるのに対し、ダンピングは $\tau^{-1} \rightarrow 0$ となる。このように、低温になるほどペアリング相互作用は強くなる一方で準粒子ダンピング (対破壊効果) は弱くなるために、高い T_c 、

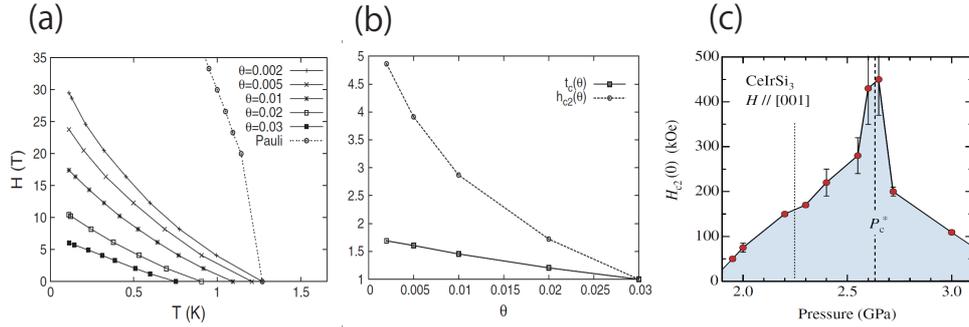


図 29: (a) $H \parallel z$ のときの温度 v.s. H_{c2} グラフ。Pauli は Pauli 極限磁場のこと。 (b) $h_{c2}(\theta) = H_{c2}(T \rightarrow 0, \theta)/H_{c2}(T \rightarrow 0, \theta_M)$ と $t_c(\theta) = T_c(\theta)/T_c(\theta_M)$ [79]。ただし $\theta_M = 0.03$ で、 $\theta = 0$ が QCP に対応する。 (c) CeIrSi₃ の $H_{c2}(T \rightarrow 0)$ (外挿値) の圧力依存性 [77]。

つまり大きな H_{c2} が得られる。この効果は QCP に近いほど顕著なため、 $\theta \rightarrow 0$ (QCP) で $H_{c2}(T \rightarrow 0)$ は増大する。図 29(b),(c) は、それぞれ理論計算と CeIrSi₃ の H_{c2} の $T \rightarrow 0$ への外挿値である。理論は常磁性状態に限定されているため、(c) のグラフの $p \leq p_c$ の部分に対応する。

一方、横磁場の場合は Pauli 極限磁場 H_P^\perp は Rashba 相互作用による増大が小さく、縦磁場の場合と異なり H_{c2} は Pauli 対破壊効果で決められる。 H_{c2} はよく見られるような上凸の形をしており、その値も 10T 以下と計算される。この値は $H_{c2}^\perp/H_{c2}^\parallel \sim 1/3$ を再現し、実験と整合する。

ここで解説した H_{c2} の増大のメカニズムを量子臨界点近傍の超伝導という枠組みから眺めてみると、CeRhSi₃, CeIrSi₃ における巨大な H_{c2} は、超伝導相に隠されてしまった反強磁性量子臨界点の近傍の強いスピン揺らぎが、 $T \ll T_c$ で超伝導相を強く安定化させている結果であるとみることができる。またこの理論によれば、スピン軌道相互作用以外の何かしらの理由で Pauli 対破壊効果が実効的に存在しない超伝導に対しても、同じように量子臨界点近傍で H_{c2} の増大が期待できることになる。そのような例として、トリプレット超伝導体に Pauli 対破壊効果が効かないような方向に磁場をかけたときの H_{c2} が考えられる。セクション 4 でも紹介したが、ごく最近、UCoGe において a 軸方向の H_{c2} が強磁性量子臨界点近傍で増大することが報告された。この振る舞いは、本節で解説したような強いスピン揺らぎと超伝導との関係性を反映するものであり、QCP 近傍の超伝導の強結合性をより普遍的に理解する実験的根拠となると考えられる。

このセクションのまとめ

- c 軸方向に関して空間反転対称性のない (Rashba 型) 超伝導体 Ce(Rh,Ir)Si₃ は、 c 軸方向の H_{c2} が非常に大きく、その振る舞いも特徴的である。一方で、 ab 面内の H_{c2} は普通の振る舞いである。
- $H \parallel z$ の H_{c2} は軌道極限磁場で決まっており、これが QCP 近傍の強いスピン揺らぎのために激しく増大して、 H_{c2} は巨大な値になる。
- $H \perp z$ の H_{c2} はほとんど Pauli 極限磁場で決まっているため、特異な振る舞いを見せない。

5 おわりに

本稿では、磁気量子臨界点近傍における超伝導について解説した。これまでに議論してきた事柄から、スピン揺らぎと超伝導の基本的認識について次のように言うことができる。すなわち、「量子臨界点近傍では、強いスピン揺らぎのために系は異常フェルミ液体的性質を示し、その同じスピン揺らぎを媒介にして Cooper ペアを形成することもできる。こ

のような場合は、ペアリング相互作用はスピン揺らぎによる波数依存性をもつので、結果として異方的超伝導が発現することになる」ということである。現在では、この認識はかなりスタンダードなものとなっている。しかし、このような一般的認識はあるものの、具体的な問題に関しては分かっていないことも多い。臨界的性質が深く絡んだ現象においては、具体的問題は臨界現象特有の普遍的性格を隠し持っている場合がある。したがって、一般的認識を踏まえた上で具体的問題に取り組むことは、よりよい量子臨界現象の理解につながっているのである。

本稿の中では色々と細かいことも述べたが、上述の「」の中身が何を意味しているのか、その雰囲気をつかんでもらえたとしたら、本稿の目的は達成されたといっていいただろう。かなり舌足らずな箇所もあったが、この拙文が、ほんの少しでも皆様のこれからの研究のお手伝いになれば、これ幸いである。

本稿を執筆にするにあたり、共同研究者である川上則雄 教授、藤本聡 准教授の両氏には原稿に目を通していただき、多くの有益なアドバイスをして頂きました。ここに感謝いたします。また、世話人の方々には、著者の遅筆によってご迷惑をおかけしたことをお詫びするとともに、このような貴重な機会を与えてくださったことに感謝いたします。上田和夫氏は、筆者の講義に出席され、講義内容に関して具体的で有益なご指摘をして下さいました。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

- [1] C. Pfleiderer : Cond-mat. 0905.2625
- [2] G. R. Stewart : Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 797.
- [3] 上田 和夫、大貫 惇睦 : 「重い電子系の物理」(裳華房, 1998)
- [4] 三宅 和正 : 「重い電子系の量子臨界現象と超伝導」(固体物理, 171, 2008)
- [5] S. Sachdev : *Quantum Phase Transition* (Cambridge University Press, 2000)
- [6] H. v. Löhneysen, A. Rosch, M. Vojta, and P. Wölfle : Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 1015.
- [7] T. Moriya and K. Ueda : Adv. Phys. **49** (2000) 555.
- [8] T. Moriya and K. Ueda : Rep. Prog. Phys. **66** (2003) 1299.
- [9] G. Knebel, D. Braithwait, P. C. Canfield, G. Lapertot, and J. Flouquet : Phys. Rev. B **65** (2001) 024425.
- [10] R. Chau and M. B. Maple : J. Phys.:Condens. Matter **8** (1996) 9939.
- [11] K. Heuser, E. W. Scheidt, T. Schreiner, and G. R. Stewart : Phys. Rev. B **58** (1998) R15959.
- [12] 宮下 精二 : 「量子スピン系」(岩波書店, 2006)
- [13] M. Vojta : Rep. Prog. Phys. **66** (2003) 2069.
- [14] J. M. Luttinger : Phys. Rev. **119** (1960) 1153.
- [15] C. M. Varma, P. B. Littlewood, and Schmitt-Rink : Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1996.
- [16] 山田 耕作 : 「電子相関」(岩波書店, 2000)
- [17] 高橋 康 : 「物性研究者のための場の量子論 I」(培風館, 1974)
- [18] P. Nozieres : Ann. Phys. (Paris) **10** (1985) 19.

- [19] P. Nozieres : J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 4.
- [20] T. Pruschke, R. Bulla, and M. Jarrel : Phys. Rev. B **61** (2000) 12799.
- [21] S. Doniach : Physica B & C **91** (1977) 231.
- [22] 永長 直人 : 「電子相関における場の量子論」(岩波書店, 1998)
- [23] D. Belitz, T. R. Kirkpatrick, and T. Vojta : Rev. Mod. Phys. **77** (2005) 579.
- [24] A. V. Chubukov, C. Pepin, and J. Rech : Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 147003.
- [25] J. A. Hertz : Phys. Rev. B **14** (1976) 1165.
- [26] A. J. Millis : Phys. Rev. B **48** (1993) 7183.
- [27] 守谷 亨 : 「磁性物理学」(朝倉書店, 2006)
- [28] T. Moriya : *Spin Fluctuations in Itinerant Electron Magnetism* (Springer-Verlag, 1985)
- [29] T. Moriya and T. Takimoto : J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 960.
- [30] H. Hasegawa and T. Moriya : J. Phys. Soc. Jpn. **36** (1974) 1542.
- [31] A. Ishigaki and T. Moriya : J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 3402.
- [32] 田崎 晴明 : 「くりこみ群の地平 (数理科学)」(サイエンス社, 1997年4月号)
- [33] P. W. Anderson : J. Phys. C **3** (1970) 2436.
- [34] S. Chakravarty, B. I. Halperin, and D. R. Nelson : Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1057; Phys. Rev. B **39** (1989) 2344.
- [35] R. Hlubina and T. M. Rice : Phys. Rev. B **51** (1995) 9253.
- [36] A. Rosch : Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4280; Phys. Rev. B **62** (2000) 4945.
- [37] S. Onari, H. Kontani, and Y. Tanaka : Phys. Rev. B **73** (2006) 224434.
- [38] K. Yamada : *Electron Correlation in Metals* (Cambridge University Press, 2004)
- [39] Y. Yanase, T. Jujo, T. Nomura, H. Ikeda, T. Hotta, and K. Yamada : Phys. Rep. **387** (2003) 1-149.
- [40] K. H. Bennemann and J. B. Ketterson : *Superconductivity* (Springer, 2008)
- [41] M. Sigrist and K. Ueda : Rev. Mod. Phys. **63** (1991) 239.
- [42] 斯波 弘行 : 「電子相関の物理」(岩波書店, 2001)
- [43] C. Honerkamp and M. Salmhofer : Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 187004.
- [44] S. S. Saxena, K. Ahilan, T. E. Weller, M. Ellerby, R. P. Smith, N. T. Skipper, S. Rowley, A. Kusmartseva, and G. G. Lonzarich : Iranian Journal of Physics Research, **6** (2006) 129.
- [45] H. Ikeda : J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 1126.

- [46] C. Pfeiderer and A. D. Huxley : Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 147005.
- [47] M. Uhlarz, C. Pfeiderer, and M. Hayden : Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 256404.
- [48] E. Sloaten, T. Naka, A. Gasparini, Y. K. Huang, and A. de Visser : Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 097003.
- [49] T. C. Kobayashi, A. Hori, S. Fukushima, H. Hidaka, H. Kotegawara, T. Akazawa, K. Takeda, Y. Ohishi, and E. Yamamoto : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 051007.
- [50] F. Lévy, I. Sheikin, and A. Huxley : Nat. Phys. **3** (2007) 460.
- [51] P. Monthoux and G. G. Lonzarich : Phys. Rev. B **59** (1999) 14598.
- [52] R. Roussev and A. J. Millis : Phys. Rev. B **63** (2001) R140504.
- [53] Z. Wang, W. Mao, and K. Bedell : Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 257001.
- [54] S. Fujimoto : J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 2061.
- [55] A. Chubukov, A. M. Finkel'stein, R. Haslinger, and D. K. Morr : Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 077002.
- [56] D. Fay and J. Appel : Phys. Rev. B **22** (1980) 3173.
- [57] A. Nevidomskyy : Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 097003.
- [58] D. Aoki : *9th International Conference on Materials and Mechanisms of Superconductivity*
- [59] M. Kato and K. Machida : Phys. Rev. B **37** (1988) 1510.
- [60] R. Konno and K. Ueda : Phys. Rev. B **40** (1989) 4329.
- [61] H. Kondo and T. Moriya : J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009) 013704.
- [62] J. L. Sarrao and J. D. Thompson : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 051013.
- [63] V. A. Sidorov, M. Nicklas, P. G. Pagliuso, J. L. Sarrao, Y. Bang, A. V. Balatsky, and J. D. Thompson : Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 157004.
- [64] P. G. Pagliuso, R. Movshovich, A. D. Bianchi, M. Nicklas, N. O. Moreno, J. D. Thompson, M. F. Hundley J. L. Sarrao, and A. Fisk : Physica B **312-313** (2002) 129.
- [65] J. D. Thompson, M. Nicklas, A. Bianchi, R. Movshovich, A. Llobet, W. Bao, A. Malinowski, M. F. Hundley, N. O. Moreno, P. G. Pagliuso, J. L. Sarrao, S. Nakatsuji, Z. Fisk, R. Borth, E. Lengyel, N. Oeschler, G. Sparn, F. Steglich : Physica B **329-333** (2003) 446.
- [66] Y. Matsuda, K. Izawa, and I. Vekhter : J. Phys.:Condens. Matter. **18** (2006) R705.
- [67] C. Petrovic, P. G. Pagliuso, M. F. Hundley, R. Movshovich, J. L. Sarrao, J. D. Thompson, Z. Fisk, and P. Monthoux : J. Phys.:Condens. Matter **13** (2001) L337.
- [68] H. Ikeda, Y. Nishikawa, and K. Yamada : J. Phys.:Condens. Matter **15** (2005) S2241.
- [69] P. Monthoux and D. J. Scalapino : Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1874.

- [70] C. H. Pao and N. E. Bickers : Phys. Rev. B **51** (1995) 16310.
- [71] A. J. Millis, S. Sachdev, and C. M. Varma : Phys. Rev. B **37** (1988) 4987.
- [72] R. D. Parks : *Superconductivity* Vol. I (Marcel Dekker, 1969), chapter 10
- [73] N. Kimura, K. Ito, K. Saitoh, Y. Umeda, H. Aoki, and T. Terashima : Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 247004.
- [74] I. Sugitani, Y. Okuda, H. Shishido, T. Yamada, A. Thamizhavel, E. Yamamoto, T. D. Matsuda, Y. Haga, T. Takeuchi, R. Settai, and Y. Ōnuki : J. Phys. Soc. Jpn. **75** (2006) 043703.
- [75] Y. Okuda, Y. Miyauchi, Y. Ida, Y. Takeda, C. Tonohiro, Y. Oduchi, T. Yamada, N. D. Dung, T. D. Matsuda, Y. Haga, T. Takeuchi, M. Hagiwara, K. Kindo, H. Harima, K. Sugiyama, R. Settai, and Y. Ōnuki : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 044708.
- [76] N. Kimura, K. Ito, H. Aoki, S. Uji, and T. Terashima : Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 197001.
- [77] R. Settai, Y. Miyauchi, T. Takeuchi, F. Lévy, I. Sheikin, and Y. Ōnuki : J. Phys. Soc. Jpn. **77** (2008) 073705.
- [78] N. Tateiwa, Y. Haga, T. D. Matsuda, S. Ikeda, E. Yamamoto, Y. Okuda, Y. Miyauchi, R. Settai, and Y. Ōnuki : J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 083706.
- [79] Y. Tada, N. Kawakami, and S. Fujimoto : Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 267006.