力学：補足プリント

1　定義など

偏微分そのものはそれほど新しい概念ではない。たとえば、

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c$$

という関数は高校で既出だが、これを

$$\mathbb{R}^4 \ni (x, a, b, c) \mapsto f(x, a, b, c) \in \mathbb{R} : f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

と思い直してみよう[1]。この場合、容易にわかるように、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, a, b, c) &= 2ax + b, \\
\frac{\partial f}{\partial a}(x, a, b, c) &= x^2, \\
\frac{\partial f}{\partial b}(x, a, b, c) &= x, \\
\frac{\partial f}{\partial c}(x, a, b, c) &= 1
\end{aligned}$$

である。ここで、それぞれの定義は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, a, b, c) &:= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x, a, b, c) - f(x, a, b, c)}{\delta x}, \\
\frac{\partial f}{\partial a}(x, a, b, c) &:= \lim_{\delta a \to 0} \frac{f(x, a + \delta a, b, c) - f(x, a, b, c)}{\delta a}, \\
\frac{\partial f}{\partial b}(x, a, b, c) &:= \lim_{\delta b \to 0} \frac{f(x, a, b + \delta b, c) - f(x, a, b, c)}{\delta b}, \\
\frac{\partial f}{\partial c}(x, a, b, c) &:= \lim_{\delta c \to 0} \frac{f(x, a, b, c + \delta c) - f(x, a, b, c)}{\delta c}
\end{aligned}$$

[1] ちなみに、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ において (a, b, c) は変数ではなく関数 f を定める定数であるが、$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ においては変数である。物理学では、定数を変数と読み替えることがしばしばある。

である。このような概念は数学的にきちんと一般化でき、偏微分と呼ばれている。n 個の変数 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ をもつ関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して、引数 x_i に関する偏微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x):=\lim_{\delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x+\delta x_i,\cdots,x_n)-f(x)}{\delta x_i}$$

で定義される。[2] これは簡単にいえば、多変数関数の引数のうち、ある一つの x_i にのみに注目したときの関数 f の変化率である。[3]
(例) 以下の関数をガンガン微分せよ。ついでに高階の偏導関数も求めてくださいな。

1. $f(x,y)=x^2+3xy^2+y^4$,

2. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

3. $f(x,y,z)=\log(x^2+y^2)$,

4. $f(t,x)=\sin(x+vt)$,

5. $f(x,y)=e^{-x^2+4xy-y^2}$

合成関数の微分

合成関数についても偏微分の規則は、1 変数のときとほとんど同じである。たとえば、$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:c(t)=(c_1(t),c_2(t))$ と $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ についての合成 $f\circ c:\mathbb{R}\to$

---

[2] 偏微分の定義は、他の変数を定数とみなして、1 変数のときとまったく同様に定義される。これはある 1 方向 x_i についてのみ考えているのであって、「全微分」という全方向的な概念ではない。全微分については、「全微分可能 $\Leftrightarrow \forall\delta a=(\delta a_1,\cdots,\delta a_n),\exists A=(A_1,\cdots,A_n),\exists\varepsilon_{\delta a},\lim_{\delta a\to 0}\varepsilon_{\delta a}=0,\quad s.t.\quad f(a+\delta a)=f(a)+\sum A_i\delta a_i+\varepsilon_{\delta a}\sqrt{\sum(\delta a_i)^2}$」と定義される。これは点 a への近づき方にはよらない、点 a の近傍での関数の性質の特徴付けである。おおざっぱにいえば、f は点 a の近傍で $f(a+\delta a)\sim f(a)+$ 定数 $\cdot\,\delta a+(\delta a\to 0$ で無視できる小さい項) のように振る舞うとき微分可能ということである。

[3] 注：多変数関数の場合、「微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能」であって逆は成り立たない。これは偏微分は、多変数のうち 1 変数のみについての変化を調べるのに対し、全微分は、すべての変数をいっぺんに動かしたときの変化を調べるからである。たとえば、$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能だが微分可能ではない。偏微分について：$f(0,\delta y)=f(\delta x,0)=0$ なので x,y それぞれに関して $\partial_x f(0,0)=0,\partial_y f(0,0)=0$ である。微分について：まず関数の連続性を調べる。原点への近づき方として $c(t)=(nt^2,mt)$ という曲線に沿って原点に近づく $(t\to 0)$ と、$\lim_{t\to 0}f(nt^2,mt)=\frac{nm^2}{n^2+m^4}$ となって極限が存在せず連続ではない。したがって微分不可能である。ちなみに、関数 f が C^1 級ならば f は微分可能である。

$\mathbb{R} : (f \circ c)(t) = f(c_1(t), c_2(t))$ に関して次が成り立つ。[4]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(c(t)) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)) \frac{dc_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t)) \frac{dc_2}{dt}(t). \end{aligned}$$

ここで $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t))$ は $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{(x_1,x_2)=(c_1(t),c_2(t))}$ ともかけ、x_i について偏微分したものに $x_i = c_i(t)$ をぶっこんだものである。[5] これを拡張して、$\phi : \mathbb{R}^m \ni s = (s_1, \cdots, s_m) \mapsto (\phi_1(s), \cdots, \phi_n(s)) \in \mathbb{R}^n$ と $f : \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ の合成 $f \circ \phi$ について、

$$\frac{\partial}{\partial s_i} f(\phi(s)) = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_a}(\phi(s)) \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial s_i}(s)$$

が成り立つ。
(例) 以下の関数をビシバシ微分せよ。ついでに高階の偏導関数も求めてくださいな。

1. $f \circ \phi(s_1, s_2) = \sin(s_1 + s_2) + \sin(s_1 - s_2)$,

2. $f \circ \phi(s_1, s_2) = f(e^{s_1 s_2}, \log(s_1 + s_2))$.

2　テイラー展開など

例でみたように、タチのよい関数ではだいたい $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ である。実は次が成り立つ。

---

[4] ちなみに、よくみられる式、$df(x) = \partial_{x_1} f(x) dx_1 + \cdots + \partial_{x_n} f(x) dx_n$ は微分形式というものを使うと、数学的にはきちんと定義できる。しかし物理では、だいたい「微小量 dx についての関係式」というくらいの認識でオッケーだと思われる。

[5] 簡単にこの式の導出をみておこう。t を固定して、

$$\begin{aligned} (\text{分母}) &= f(c(t+\delta t)) - f(c(t)) \\ &= f(c(t) + \delta c) - f(c(t)) \qquad (\delta c_i := c_i(t+\delta t) - c_i(t)) \\ &= f(c_1(t) + \delta c_1, c_2(t) + \delta c_2) - f(c_1(t), c_2(t) + \delta c_2) + f(c_1(t), c_2(t) + \delta c_2) - f(c_1(t), c_2(t)) \\ &= f_{x_1}(c(t)) \delta c_1 + f_{x_2}(c(t)) \delta c_2 + (\delta c \text{ の higher order}). \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{(\text{分母})}{\delta t} &= f_{x_1}(c(t)) \frac{c_1(t+\delta t) - c_1(t))}{\delta t} + f_{x_2}(c(t)) \frac{c_1(t+\delta t) - c_2(t))}{\delta t} \\ &\to \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)) \frac{dc_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t)) \frac{dc_2}{dt}(t). \end{aligned}$$

「関数 f は C^r 級ならば、r 階までの偏導関数は $\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}f}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}} \quad (p_1+\cdots p_n \le r)$ の形にかける。」

たとえば、$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ などである。したがって関数が C^r 級ならば偏微分はその順番によらないことがわかる。以下では C^∞ 関数のみを考える。

全微分の定義のところでもみたように、タチのよい関数では、点 a の近くの点 $a+\delta a$ における値 $f(a+\delta a)$ を、点 a における情報 $f(a), \partial_{x_i}f(a)$ だけから近似的に求めることができる。つまり、微分の定義式から $f(a+\delta a) = f(\delta a) + \sum_i \partial_{x_i} f(a)\delta a_i +$ (δa の高次項) とかける。これを改良して、よりよい精度で点 $a+\delta a$ での関数の値 $f(a+\delta a)$ を求めるためには、高次の微係数が必要になりそうである。これをきちんと定式化したものがテイラー・マクローリン展開である。

テイラー・マクローリンの公式は、$f(x_1,\cdots,x_m)$ に対して $\exists t \in (0,1), s.t.$

$$\begin{aligned} f(x+\delta x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m} \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x) + R_N(x,\delta x,t), \\ R_N(x,\delta x,t) &= \frac{1}{N!}\left(\sum_{i=1}^{m} \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^N f(x+t\delta x) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで R_N は剰余項といい、$(N-1)$ 次まで展開したときの「おつり」を表し、e^x のようなタチのよい関数においては $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$ が成り立つ。このように剰余項が 0 になる場合をテイラー・マクローリン展開とよぶ。たとえば、

$$f(x,y) = f(0,0) + [f_x(0,0)x + f_y(0,0)y] + \frac{1}{2!}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + \cdots$$

のようにかける。物理では、特定の文脈以外で関数の微分可能性を考慮することは少なく、細かいことを気にせずに以下の展開式を使うことが多い。[6]（点 x まわりでの展開）

$$f(x+\delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{m} \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(x).$$

(例) 以下の関数を力いっぱい原点まわりでテイラー・マクローリン展開せよ。3 次くらいまでいってみてください。

1. $f(x) = e^x$,

2. $f(x,y) = e^{x+y}$,

3. $f(x,y) = e^x \sin y$.

---

[6] $\sum_i \delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = T(\delta x)$ と略記すると、$f(x+\delta x) = e^{T(\delta x)}f(x)$ ともかける。この式は並行移動とも関係していて、覚えておくと便利である。