熱統計力学演習 II

8　理想 Bose 気体

8.1　Bose-Einstein 凝縮

体積 V の箱に閉じ込められた質量 m、粒子数 N の理想 Bose 気体の低温での振舞いについて考える。ただし、スピン自由度は考えない。Bose 分布関数の形から化学ポテンシャル μ は正になることができない。このため、1 粒子励起状態 $\boldsymbol{p} \neq 0$ の占拠数には制限がつく。こうして、ある温度 T_c 以下では、取り残されたマクロな数の粒子が基底状態 ($\boldsymbol{p} = 0$) に落ち込み、Bose-Einstein 凝縮を起こす。

(a) この転移温度 T_c を求めよ。また、基底状態に落ち込んでいる粒子数 N_0 の温度変化を T_c を用いて表せ。

(b) 内部エネルギーを求めよ。また、T_c 以下での比熱 C の振る舞いについて考察せよ。

(c) 見方を変えて、温度一定のもとで、体積を変化させたときの圧力変化について考察せよ。

8.2　Bose-Einstein 凝縮 (次元性)

Bose 凝縮が有限温度で起こるかどうかは、空間次元に依存する。

(a) 2 次元 ($L \times L$) の場合について、化学ポテンシャル μ を N、T の関数として表せ。また、Bose 凝縮が起こるとすれば、$T = 0$ のときであることを示せ。

(b) 一般に、体積 V 中の Bose 気体の低エネルギーにおける 1 粒子準位密度 $g(\epsilon)$ が

$$g(\epsilon) \propto V\epsilon^{\alpha} \quad (\epsilon \sim 0) \tag{8.1}$$

と書けるとき、Bose 凝縮は $\alpha \leq 0$ では起こらないことを示せ。

8.3 調和トラップ中の Bose-Einstein 凝縮

次の等方的な調和ポテンシャル中の Bose 気体を考える。

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{8.2}$$

(a) このポテンシャル中の1粒子状態について考える。これは振動数 ω をもつ3次元調和振動子と考えられる。エネルギー準位を求めよ。

(b) エネルギー準位が十分連続的に存在するとして、エネルギー ϵ における1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。ただし、以下では、最低エネルギー準位を ϵ_0 とする。

(c) N_0 個のマクロな数の粒子が最低エネルギー状態に落ち込む凝縮温度 $T_{\rm c}$ を求め、その凝縮粒子数 N_0 を温度 T の関数として求めよ。