

熱統計力学演習 II

7 理想 Fermi 気体

7.1 Fermi 縮退

スピン $1/2$ をもつ 3 次元理想 Fermi 気体の例として、金属中の自由電子について考える。

- (a) 一辺の長さ L の立方体 (体積 $V = L^3$) 内に含まれる、質量 m の自由電子 N 個の系を考えよう。ここでは、電子の波動関数 $\psi(x, y, z)$ に対して、周期境界条件

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z)$$

を課す。状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。

- (b) 絶対零度における化学ポテンシャル、すなわち、Fermi 準位 ϵ_F を粒子数密度 $n = N/V$ を用いて表せ。また、 1cm^3 に 10^{22} 個の電子を含む金属の Fermi 縮退温度 $T_F = \epsilon_F/k_B$ を計算せよ。
- (c) 状態密度 $D(\epsilon)$ 、および、その Fermi 準位における値 $D(\epsilon_F)$ を Fermi エネルギー ϵ_F を用いて表せ。

7.2 電子比熱

続いて、低温での振る舞いを調べよう。

- (a) 化学ポテンシャル μ の ϵ_F からのずれを T^2 までで求めよ。
- (b) 内部エネルギー E 、および、圧力 p を T^2 までで求め、 ϵ_F を用いて表せ。
- (c) 同様に、等温圧縮率 κ を T^2 までで求めよ。ただし、

$$(i) \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \text{および、} \quad (ii) \quad \kappa = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T$$

の 2 つの方法で求め、値が一致することを確認せよ。

- (d) 定積比熱 C が T に比例することを示し、Fermi 準位における状態密度 $D(\epsilon_F)$ を用いて表せ。

7.3 Pauli 磁化率

上記、自由電子のスピン磁化率 χ_s を求めよう。

- (a) 絶対零度における表式を求めよ。
- (b) 低温での温度について最低次の補正を求めよ。
- (c) Fermi 縮退温度 T_F よりずっと高温での表式を求めよ。

ただし、磁場 H の下での 1 電子のエネルギーは

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H \quad (7.1)$$

で与えられるものとする。