

# 熱統計力学演習 II

## 7 理想 Fermi 気体

### 7.1 Fermi 縮退

スピン  $1/2$  をもつ 3次元理想 Fermi 気体の例として、金属中の自由電子について考える。

- (a) 一辺の長さ  $L$  の立方体 (体積  $V = L^3$ ) 内に含まれる、質量  $m$  の自由電子  $N$  個の系を考えよう。ここでは、電子の波動関数  $\psi(x, y, z)$  に対して、周期境界条件

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z)$$

を課す。状態密度  $D(\epsilon)$  を求めよ。

- (b) 絶対零度における化学ポテンシャル、すなわち、Fermi 準位  $\epsilon_F$  を粒子数密度  $n = N/V$  を用いて表せ。また、 $1\text{cm}^3$  に  $10^{22}$  個の電子を含む金属の Fermi 縮退温度  $T_F = \epsilon_F/k_B$  を計算せよ。
- (c) 状態密度  $D(\epsilon)$ 、および、その Fermi 準位における値  $D(\epsilon_F)$  を Fermi エネルギー  $\epsilon_F$  を用いて表せ。

### 7.2 電子比熱

続いて、低温での振る舞いを調べよう。

- (a) 化学ポテンシャル  $\mu$  の  $\epsilon_F$  からのずれを  $T^2$  までで求めよ。
- (b) 内部エネルギー  $E$ 、および、圧力  $p$  を  $T^2$  までで求め、 $\epsilon_F$  を用いて表せ。
- (c) 同様に、等温圧縮率  $\kappa$  を  $T^2$  までで求めよ。ただし、

$$(i) \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \text{および、} \quad (ii) \quad \kappa = \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T$$

の 2つの方法で求め、値が一致することを確認せよ。

- (d) 定積比熱  $C$  が  $T$  に比例することを示し、Fermi 準位における状態密度  $D(\epsilon_F)$  を用いて表せ。

### 7.3 Pauli 磁化率

上記、自由電子のスピン磁化率  $\chi_s$  を求めよう。

- (a) 絶対零度における表式を求めよ。
- (b) 低温での温度について最低次の補正を求めよ。
- (c) Fermi 縮退温度  $T_F$  よりずっと高温での表式を求めよ。

ただし、磁場  $H$  の下での 1 電子のエネルギーは

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H \quad (7.1)$$

で与えられるものとする。