

# 熱統計力学演習 II

## 6 調和振動子

### 6.1 格子比熱 (Einstein 模型)

$N$  個の独立した調和振動子

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right]$$

について考えよう。

- (a) 古典論的に考えて、内部エネルギー  $E$ 、エントロピー  $S$ 、比熱  $C$  を求めよ。
- (b) 量子論的に考えて、内部エネルギー  $E$ 、エントロピー  $S$ 、比熱  $C$  を求めよ。また、比熱  $C$  の高温、低温での振舞いを調べよ。

### 6.2 格子比熱 (Debye 模型)

固体中の格子振動は音波として伝搬する。等方的な系では、縦波 (伝搬速度  $v_l$ ) と、2つの独立な横波のモード (伝搬速度はともに  $v_t$ ) が可能であり、それらの波の振動数は、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を用いて、それぞれ  $\omega = v_l |\mathbf{k}|$ 、および、 $\omega = v_t |\mathbf{k}|$  と表される。このような分散をもつ調和振動子のエネルギー固有値は

$$E(\{n_{\mathbf{k}s}\}) = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar \omega_{\mathbf{k}s} \left( n_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right), \quad n_{\mathbf{k}s} = 0, 1, 2, \dots$$

で与えられる。ここで、 $s$  は上記3つのモードを表す。

- (a) 固体の体積を  $V$ 、全原子数を  $N$  として、振動数が  $\omega$  と  $\omega + d\omega$  の間にある状態の数  $D(\omega)d\omega$  を求めよ。

- (b) 格子振動の振動数には上限が存在し、振動モードの総数は、格子振動の自由度の数となる。すなわち、

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega) d\omega = 3N \quad (6.1)$$

このことを用いて、 $D(\omega)$  を  $\omega_D$  を用いて表せ。 $\omega_D$  を Debye 振動数という。

- (c) このモデルにおける固体の定積比熱  $C$  を求め、高温、低温での振る舞いを調べよ。また、前問の Einstein 模型と比較せよ。
- (d) 一般化して、 $d$ 次元における格子比熱の低温 ( $T \ll \omega_D$ ) での温度依存性を調べよ。

### 6.3 空洞輻射

体積  $V$  の箱の中にある電磁波が温度  $T$  の熱浴と平衡にある場合について考える。箱の中の電磁波は分散関係  $\omega_{\mathbf{k}} = ck$  ( $c$  は光速) をもつ振動子の集まりとみなすことができる。しかし、Debye 模型の場合と違い、縦波は存在せず、振動モードに上限はつかない。

- (a) 単位体積当りの状態密度  $D(\omega)$  を求めよ。
- (b) エネルギー密度  $u(\omega)$  の振動数分布を求めよ。
- (c) 波長  $\lambda$  についての分布に変換し、高温長波長極限での分布を求めよ。
- (d) 全エネルギー密度  $u$  が  $T^4$  に比例することを示せ。