

熱統計力学演習 II

1 統計基礎

1.1 カノニカル分布

系 A とそれを取り囲む系 B があり、B は A に比べて十分大きく、A に対して温度 T の熱浴として働くとする。A と B を合わせた全系は周囲から孤立しているとする。このとき、A がある 1 つの量子状態 n (エネルギー E_n) にある確率 P_n がカノニカル分布

$$P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)} \quad (1.1)$$

で与えられることを示せ。

1.2 2 準位系

エネルギー準位が 0 と $\epsilon (> 0)$ の 2 準位だけをもつ互いに独立な原子が N 個ある系を考える。系が温度 T の熱浴と接しているとして、そのエントロピー S 、内部エネルギー E を求めよ。また、比熱 C を求め、温度 T の関数としてそれを図示せよ。

1.3 ゴム弾性

質量を無視できる長さ a の剛体棒状の分子 $2N$ 個が、その端点で他の分子と繋がって鎖をつくっている。各接続点における分子間の角度は 0 か π であり、その角度はエネルギーには無関係とする。温度 T におけるエントロピー S と、長さ $L = 2Ma$ を一定に保つために必要な張力 P を求めよ。また、 L の小さな極限で張力はどのように得られるか？

1.4 電気2重極

一定の大きさ μ の電気2重極モーメントをもつ2原子分子 N 個からなる理想気体がある。この気体の電気分極 P は次式で与えられる事を示せ。

$$P = \frac{N}{V} \mu \left\{ \coth \left(\frac{\mu E}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{\mu E} \right\} \quad (1.2)$$

ただし、 V は気体の体積、 E は外部電場である。 $|\mu E| \ll k_B T$ の極限で、誘電率が

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{N}{V} \frac{\mu^2}{3k_B T} \quad (1.3)$$

で与えられる事を示せ。

1.5 常磁性体

磁場 H の方向に離散的な値 $g\mu_B m$ (磁気量子数 $m = J, J-1, \dots, -J+1, -J$) だけを持ちうる磁気モーメントがある。単位体積中に、このような磁気モーメント n 個を含む物体の磁化 M を求め、磁場の関数として図示せよ。また、高温低磁場の極限で、磁化率 $\chi = M/H$ ($H \rightarrow 0$) を計算せよ。さらに、特別なケースとして、i) $J = 1/2$ 、および、ii) $g\mu_B J = \mu_0$ (一定)、かつ、 $J \rightarrow \infty$ 、の時はどうなるか？